Exercise (Week 8)
October 27, 2023

1. 在 $M_2(\mathbb{R})$ 中令 $W=\{A\in M_2(\mathbb{R}):A^{\mathrm{t}}=A\}$ 以及

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},A_4=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},A_5=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},A_6=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

   (a) 證明 $W=\mathrm{Span}(A_1,A_2,A_3)$.

   (b) 利用 A_3 與 A_4,A_5 的關係以及 $\mathrm{Span}(S)$ 是包含 S 的最小向量空間的概念說明 $W\subseteq\mathrm{Span}(A_1,A_2,A_4,A_5)$.

   (c) 說明 A_1,A_2,A_4,A_5 為 linearly independent，並依此說明 $W\subsetneq\mathrm{Span}(A_1,A_2,A_4,A_5)$（請學習利用反證法以及講義 Lemma 3.5.5 or Question 3.9）。

   (d) 說明 $W\supsetneq\mathrm{Span}(A_3,A_6)$。

2. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{R}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$。已知 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 且為 linearly independent。證明 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n)=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$（注意要用到 n）並證明 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 也是 linearly independent（請學習利用反證法以及講義 Lemma 3.5.5 or Question 3.9）。

3. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{R}$ 且 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\in V$ 為 linearly independent. 令

$$\mathbf{w}_1=a_1\mathbf{v}_1+b_1\mathbf{v}_2+c_1\mathbf{v}_3,\ \mathbf{w}_2=a_2\mathbf{v}_1+b_2\mathbf{v}_2+c_2\mathbf{v}_3,\ \mathbf{w}_3=a_3\mathbf{v}_1+b_3\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3,$$

   以及 $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$.

   (a) 試說明滿足 $x_1\mathbf{w}_1+x_2\mathbf{w}_2+x_3\mathbf{w}_3=0$ 的 x_1,x_2,x_3 需符合哪一個聯立方程組？(請注意是否需要 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent)

   (b) 證明 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ 為 linearly independent 若且唯若 A 為 invertible.

   (c) 試推廣到更一般的情況，即假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent。如何利用矩陣來判斷 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 為 linearly independent。(注意 m 未必等於 n 所以矩陣未必是方陣。)

4. 給定 $n\in\mathbb{N}$, 令 $P_n(\mathbb{R})$ 表示所有次數小於等於 n 的實係數多項式所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space.

   (a) 若 $m\le n+1$ 且 $f_1(x),\ldots,f_m(x)\in P_n(\mathbb{R})$ 為次數皆相異的非零多項式. 證明 $f_1(x),\ldots,f_m(x)$ 為 linearly independent. (請嘗試利用上一題 (c) 的結果，考慮 $\mathbf{v}_1=1,\mathbf{v}_2=x,\ldots,\mathbf{v}_{n+1}=x^n$)

   (b) 假設 $p_0(x),p_1(x),\ldots,p_n(x)\in P_n(\mathbb{R})$ 皆為非零多項式且對每一個 $i\in\{0,1,\ldots,n\}$ 皆有 $\deg(p_i(x))=i$. 證明 $p_0(x),p_1(x),\ldots,p_n(x)$ 為 $P_n(\mathbb{R})$ 的一組 basis。(Hint: 可直接用 $\mathrm{Span}(1,x,\ldots,x^n)=P_n(\mathbb{R})$ 以及上面某一題的結果)。

5. 請決定以下集合是否為其所屬的 vector space 中的一組 basis.

(a) In $\mathbb{R}^3$,

$$S_1 = \{(1,2,-1),(1,0,2),(2,1,1)\}, \quad S_2 = \{(1,-3,-2),(-3,1,3),(-2,10,-2)\}.$$

(b) In $P_2(\mathbb{R})$,

$$S_3 = \{-2x^2-2x+1, x^2-3x+2, 6x^2-x+1\},$$
$$S_4 = \{x^2-2x-1, x^2-2x+4, 9x^2-18x+1\}.$$