Exercise (Week 9)
November 03, 2023

1. 令 V 為 vector space 且 U, W 為其 subspace.

   (a) 假設 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in U$ 為 linearly independent，$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in W$ 也是 linearly independent。已知 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$，證明 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 為 linearly independent.

   (b) 假設 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in U$ 為 U 的一組 basis，$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in W$ 為 W 的一組 basis。已知 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 為 linearly independent，證明 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$。

   (c) 假設 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in U$ 為 U 的一組 basis，$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in W$ 為 W 的一組 basis。證明 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 為 $U + W$ 的一組 basis 若且唯若 $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$。

2. 考慮所有 n 階實方陣所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space M_n. 令 $W_1 = \{A \in M_n : A^{\mathrm{t}} = A\}$, $W_2 = \{A \in M_n : A^{\mathrm{t}} = -A\}$, $W_3 = \{[a_{ij}] \in M_n : a_{ij} = 0, \forall i \leq j\}$.

   (a) 試分別找出 W_1, W_2, W_3 的一組 basis，並依此決定 W_1, W_2, W_3 的維度。

   (b) 上一大題告訴我們可以用交集的情形處理 linearly independent 的性質（有時找交集比證明線性獨立簡單）。試利用交集的看法說明 (a) 小題中找的 W_1, W_2 的 basis 放在一起仍為 independent。同樣的說明 W_1, W_3 的基底放在一起，以及 W_2, W_3 的基底放在一起是否依然為 independent。最後若三組基底都放在一起是否仍為 independent?

   (c) 在 Week 7 習題 3. 我們用 constructive 的方法證明了 $W_1 + W_2 = M_n$ 以及 $W_1 + W_3 = M_n$。試利用 $\dim M_n = n^2$ 以及 (b) 的結果證明 $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = M_n$，並證明 $W_2 + W_3$ 為所有對角線為 0 的 n 階實方陣所形成的 vector space。

3. 假設 U, W 為 V 的 subspace。已知 $\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 1$。

   (a) 試利用 subspace 之間維度的關係證明 $W \subseteq U$ 或 $U \subseteq W$ 且 $\dim U$ 和 $\dim W$ 的差為 1。(Hint：$U \cap W \subseteq U \subseteq U + W$)、

   (b) 假設 $U \not\subseteq W$，令 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 $U \cap W$ 的一組 basis。且考慮 $\mathbf{u} \in U$ 但 $\mathbf{u} \notin W$。證明 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}$ 為 linearly independent，也因此證明 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}$ 為 $U + W$ 的一組 basis。並依此重新證明 (a) 的結果。

   (c) 試找到例子滿足 $\dim(U + W) = \dim(U \cap W) + 2$，但 $W \not\subseteq U$ 且 $U \not\subseteq W$。

4. 考慮所有次數小於等於 2 的實係數多項式所形成的 vector space $P_2(\mathbb{R})$. 令

$$S = \{2x^2 - 3x + 1, x^2 + 4x - 2, -8x^2 + 12x - 4, x^2 + 37x - 17, -3x^2 - 5x + 8\}$$

   且令 $V = \mathrm{Span}(S)$. (Hint: 可將 $P_2(\mathbb{R})$ 的元素看成 $\mathbb{R}^3$ 的向量。例如 $2x^2 - 3x + 1$ 看成 $(2, -3, 1)$.)

   (a) 試找到 S 的一個 subset 形成 V 的一組 basis.

   (b) 試將 S 中其他的元素寫成 (a) 中所得的 basis 的 linear combination.

   (c) 試說明 V 是否等於 $P_2(\mathbb{R})$.

5. 考慮所有 2×3 實矩陣所形成的 vector space 中的一個 subspace

$$V=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} : a_1-a_2+2b_1-3b_2+b_3=2a_1-a_2-a_3+3b_1-4b_2+4b_3=0\right\}.$$

考慮 $M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) 試找到 V 的一組 basis.

(b) 說明 $M_1,M_2\in V$ 且 M_1,M_2 為 linearly independent.

(c) 擴充 M_1,M_2 使其形成 V 中的一組 basis.

6. 考慮 $\mathbb{R}^7$ 中的向量 $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 且令 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$.

(a) 試找到矩陣 A 使得 $V=\mathrm{Col}(A)$, 且將 A 化成 echelon form 並說明如何依此找到 V 的一組 basis.

(b) 試找到矩陣 B 使得 $V=\mathrm{Row}(B)$, 且將 B 化成 reduced echelon form 並說明如何依此找到 V 的一組 basis.

(c) 若不限制 basis 的形式你覺得此題哪一個找 basis 的方法比較好? 試將其中一組 basis 寫成另一組 basis 的線性組合.