Exercise (Week 10)

November 08, 2023

1. 設 A, B 分別為 $m\times n$ 與 $n\times k$ 階矩陣。令 $C=AB$。

   (a) 說明若 $\mathbf{v}$ 是聯立方程 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一組解，則 $\mathbf{v}$ 亦為聯立方程 $C\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一組解，並依此說明 $N(B)$ 和 $N(AB)$ 的包含關係。

   (b) 利用 (a) 的結果以及 dimension theorem 說明 $\mathrm{rank}(B)$ 和 $\mathrm{rank}(AB)$ 的大小關係。

   (c) 若 $\mathbf{v}$ 是聯立方程 $C\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解，試找到聯立方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解，並利用方程組有解與 column space 的關連，說明 $\mathrm{Col}(A)$ 和 $\mathrm{Col}(AB)$ 的包含關係。

   (d) 說明當 $k\geq n$ 時 $\mathrm{nullity}(A)$ 和 $\mathrm{nullity}(AB)$ 的大小關係。並舉例說明在其他情況（即 $k<n$）$\mathrm{nullity}(A)$ 和 $\mathrm{nullity}(AB)$ 並無一定的大小關係。

2. 設 A, B 分別為 $m\times n$ 與 $n\times m$ 階矩陣。已知 AB 為 invertible。

   (a) 試利用 $\mathrm{rank}(AB)$ 與 $\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)$ 的關係，說明 $\mathrm{rank}(A)$ 與 $\mathrm{rank}(B)$ 為何。

   (b) 說明 $\mathrm{nullity}(A)$ 與 $\mathrm{nullity}(B)$ 為何。

   (c) 係數矩陣為 A 的聯立方程組和係數矩陣為 B 的聯立方程組，哪一個有解的話會有唯一解？哪一個一定有解？（請用 (a),(b) 的結果回答，不要用以前知道的性質）

3. 令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) 試求 A 的 nullity 並寫下 $N(A)$ 的一組 basis.

   (b) 試分別利用 elementary row operations 將 A 及 A^{t} 做變成 echelon forms，並依此找到 $\mathrm{Row}(A)$ 的兩組 bases.

   (c) 說明 $N(A)$ 和 $\mathrm{Row}(A)$ 的關係（Hint：觀察內積）。

4. 考慮 $\mathbb{R}^4$ 中的兩個 subspace U,W。其中 $\mathbf{u}_1=(1,1,1,1),\mathbf{u}_2=(1,0,2,0),\mathbf{u}_3=(0,2,1,1)$ 為 U 的一組 basis; $\mathbf{w}_1=(3,0,3,1),\mathbf{w}_2=(3,2,3,2),\mathbf{w}_3=(2,-1,2,0))$ 為 W 的一組 basis。

   (a) 找到矩陣 B_1,B_2 使得 $U=N(B_1)$, $W=N(B_2)$, 並以此找出 $U\cap W$ 的一組 basis.

   (b) 試找到向量空間

   $$\{(c_1,c_2,c_3,d_1,d_2,d_3)\in\mathbb{R}^6 : c_1\mathbf{u}_1+c_2\mathbf{u}_2+c_3\mathbf{u}_3=d_1\mathbf{w}_1+d_2\mathbf{w}_2+d_3\mathbf{w}_3\}$$

   的一組 basis，並依此找到 $U\cap W$ 的一組 basis.

   (c) 利用 (a) 或 (b) 所得的 $U\cap W$ 的一組 basis 分別擴充成 U, W 以及 $U+W$ 的 bases. 並驗算

   $$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W).$$