Exercise (Week 12)

November 24, 2023

1. 對任意 V 中的子集合 S 定義 $S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in S\}$. 假設 S_1, S_2 皆為 V 的 subset.

   (a) 若 $S \subseteq V$, 證明 $S^{\perp}$ 為 V 的一個 subspace.

   (b) 證明 $S^{\perp} = \mathrm{Span}(S)^{\perp}$.

   (c) 證明 $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$, 並依此說明 $\mathrm{Span}(S) \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$.

   (d) 假設 $S_1 \subseteq S_2$, 證明 $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$.

   (e) 證明 $(S_1 \cup S_2)^{\perp} = S_1^{\perp} \cap S_2^{\perp}$.

   (f) 證明 $(S_1 \cap S_2)^{\perp} \supseteq S_1^{\perp} + S_2^{\perp}$, 並在 $\mathbb{R}^2$ 上考慮一般的內積（dot product）找 S_1, S_2 使得 $(S_1 \cap S_2)^{\perp} \neq S_1^{\perp} + S_2^{\perp}$ 的例子（hint：考慮 $\mathrm{Span}(S_1) = \mathrm{Span}(S_2)$ 的情況）。

2. 假設 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 orthonormal basis.

   (a) 假設 $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ 且 $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ 且 $\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$. 證明

   $$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle.$$

   (b) 令 $W = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ 其中 $1 \leq k < n$. 對任意 $\mathbf{v} \in V$, 證明

   $$\| \mathbf{v} \|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle^2,$$

   且等號成立若且唯若 $\mathbf{v} \in W$.

3. 在 $\mathbb{R}^4$ 中考慮 dot product. 令 $W = \mathrm{Span}\big((2,-1,-2,4), (-2,1,-5,5), (-1,3,7,11)\big)$

   (a) 利用 Gram-Schmidt Process 找到 W 上的一組 orthonormal basis, 並將之擴大成 $\mathbb{R}^4$ 的一組 orthonormal basis。依此寫下 $W^{\perp}$ 的一組 basis.

   (b) 試將 $\mathbf{v} = (-11, 8, -4, 18)$ 寫成 $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$，其中 $\mathbf{u} \in W^{\perp}$, $\mathbf{w} \in W$，並求 $\mathbf{v}$ 分別在 W 以及 $W^{\perp}$ 上的 orthogonal projection.

4. 考慮 $P_2(\mathbb{R})$ 上的 inner product 定義為

   $$\langle f, g \rangle = f(1)g(1) + f(0)g(0) + f(-1)g(-1), \ \forall f, g \in P_2(\mathbb{R}).$$

   (a) 針對 $P_2(\mathbb{R})$ 上 $x^2, 1, x$ 這組 basis, 利用 Gram-Schmidt Process 找到 $P_2(\mathbb{R})$ 上的一組 orthonormal basis（請依照 $x^2, 1, x$ 的順序，以方便處理下一小題）。

   (b) 試求 $(x+1)^2$ 在 $\mathrm{Span}(x^2, 1)$ 上的 orthogonal projection.