Exercise (Week 13)
December 01, 2023

1. 考慮 V 為 finite dimensional inner product space.
   (a) 假設 W 為 V 的 subspace, 證明若 $\mathbf{v} \notin W$, 則存在 $\mathbf{u} \in W^{\perp}$ 使得 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \neq 0$.
   (b) 假設 W_1, W_2 為 V 的 subspace, 證明
   $$(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}, \quad W_1^{\perp} + W_2^{\perp} = (W_1 \cap W_2)^{\perp}.$$
   (哪一個不需 V 為 finite dimensional 的假設?)

2. 假設 $A \in M_{m \times n}$ 且 $\operatorname{rank}(A) = n$. 令 P 表示投影到 $\operatorname{Col}(A)$ 的投影矩陣. 請利用 A, A^{t} 表示 P 並利用矩陣乘法性質 (不要用投影概念) 證明以下敘述:
   (a) 若 $\mathbf{w} \in \operatorname{Col}(A)$, 則 $P\mathbf{w} = \mathbf{w}$. (Hint: $\mathbf{w} = A\mathbf{x}$ for some $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$)
   (b) 若 $\mathbf{v} \in \operatorname{Col}(A)^{\perp}$, 則 $P\mathbf{v} = \mathbf{0}$. (Hint: $\mathbf{v} \in N(B)$ for some matrix B. what's B?)

3. 考慮 $\mathbb{R}^n$ 利用 dot product 所成的 inner product space. 令 W 為 V 的 subspace.
   (a) 已知對任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, 存在 $\mathbf{w} \in W, \mathbf{w}' \in W^{\perp}$ 使得 $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$. 說明 $\mathbf{v}$ 在 W 的投影為 $\mathbf{w}$ 且 $\mathbf{v}$ 在 $W^{\perp}$ 的投影為 $\mathbf{w}'$.
   (b) 假設 P_W, $P_{W^{\perp}}$ 分別為對 W 和 $W^{\perp}$ 的投影矩陣. 證明 $P_W = I_n - P_{W^{\perp}}$ (即證明若 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, 則 $(I_n - P_{W^{\perp}})\mathbf{v}$ 為 $\mathbf{v}$ 在 W 的投影).

4. 考慮 $\mathbb{R}^3$ 利用 dot product 所成的 inner product space. 令
   $$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}.$$
   以下我們用兩種方法求對 W 的投影矩陣.
   (a) 找出 W 的一組 basis, 並利用此組 basis 得到矩陣 A 使得 $\operatorname{Col}(A) = W$.
   (b) 利用 (a) 中所得的 A 寫下對 W 的投影矩陣 (請將矩陣具體乘開).
   (c) 找出 $W^{\perp}$ 的一組 basis, 並利用此組 basis 得到矩陣 B 使得 $\operatorname{Col}(B) = W^{\perp}$.
   (d) 利用 (c) 中所得的 B 寫下對 $W^{\perp}$ 的投影矩陣, 並利用上一題 (b) 的結果寫下對 W 的投影矩陣.

5. 假設矩陣 A 的 column vectors 從左至右依序為
   $$\mathbf{w}_1 = (1, 3, 1, 1), \mathbf{w}_2 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{w}_3 = (-1, 5, 2, 2)$$
   利用 Gram-Schmidt 在 dot product 之下可得到 orthonormal basis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. 令矩陣 Q 的 column vectors 從左至右依序為 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.
   (a) 試找到矩陣 R 使得 $A = QR$ (請確認 R 為 upper triangular matrix),即寫下 A 的 QR decomposition。
   (b) 試利用 A 的 QR decomposition 寫下對 $\operatorname{Col}(A)$ 的投影矩陣。