Linear Algebra (II) Exercise (Week 1)

February 23, 2024

1. 假設矩陣 $M=\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 為 $(m+n)$ 階方陣, 其中 A,B 分別為 m 階、n 階方陣, 而 O 為 $n\times m$ 階零矩陣，C 為 $m\times n$ 階矩陣。證明 $\det M=(\det A)(\det B)$.

2. 令 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & -3 \\ 2 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. 請依以下規定方法求 $\det(A)$.

   (a) 利用 elementary row operations, 並驗證與上一題是否相符.

   (b) 利用降階方法.

3. 利用 elementary row (column) operations 以及數學歸納法 (先從階數小的開始，找到規律性) 求以下 n 階方陣的行列式.

   (a) $A=[a_{ij}]$ 其中 $a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{if } i+j=n+1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

   例如 $n=2$ 時 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $n=3$ 時 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) $B=[b_{ij}]$ 其中 $b_{ij}=\begin{cases} j, & \text{if } i=1; \\ j, & \text{if } i>1 \text{ and } j>i; \\ -j, & \text{if } i>1 \text{ and } j<i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

   例如 $n=2$ 時 $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $n=3$ 時 $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

4. 假設 $M=\begin{bmatrix} b+8c & 2c-2b & 4b-4c \\ 4c-4a & c+8a & 2a-2c \\ 2b-2a & 4a-4b & a+8b \end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) 試求 P^{-1} 並求出 $P^{-1}MP$.

   (b) 求 $\det(P^{-1}MP)$ 並以此求 $\det(M)$ (Hint: $\det(AB)=\det(A)\det(B)$).

5. 假設 A 為 6 階方陣滿足 $A^3=2I_6$。試求 $\det(A)$.

6. 假設 $f:M_n\to\mathbb{R}$ 是 multi-linear 且滿足對任意 $A\in M_n$, 若 A 有某兩相鄰的 row 是相同的, 則 $f(A)=0$. 證明 f 為 alternating.