Linear Algebra (II) Exercise (Week 4)

March 15, 2024

1. 考慮 $T:V\to V$ 為 linear transformation.

   (a) 若 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\in V$ 皆為非零向量滿足 $T(\mathbf{v}_1)=-\mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2)=2\mathbf{v}_2, T(\mathbf{v}_3)=\mathbf{v}_3$. 證明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 linearly independent，再證明 $\mathbf{v}_3\notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 並以此說明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly independent.

   (b) 利用數學歸納法證明更一般的情形. 已知 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\in V$ 皆為非零向量滿足 $T(\mathbf{v}_1)=c_1\mathbf{v}_1,\cdots,T(\mathbf{v}_n)=c_n\mathbf{v}_n$, 其中 $c_1,\ldots,c_n$ 兩兩相異. 證明 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent.

2. $\mathbb{R}^2$ 上的一維子空間 L 皆可由一個非零向量所展成，因此可視為一個通過原點的直線 $L=\{(x,y)\mid ax+by=0\}$.

   (a) 設 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定義為 $T(x,y)=(x+y,x-y)$ 試利用 a,b 表達 $T(L)$ 和 $T^{-1}(L)$ 為怎樣的子空間。

   (b) 設 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定義為 $T(x,y)=(x+y,x+y)$ 試利用 a,b 表達 $T(L)$ 和 $T^{-1}(L)$ 為怎樣的子空間。

3. 試找到以下 linear transformations 的 kernel 和 image 的 basis.

   (a) $T_1:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$, 定義為
   $$T_1(a,b,c,d,e)=(a-c+3d-e, a+2d-e, 2a-c+5d-e, -c+d).$$

   (b) $T_2:P_2(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$, 定義為 $T_2(f(x))=x^2f'(x)$.

4. 考慮 linear transformations $T:V\to W$, $F:W\to U$.

   (a) 證明 $R(F\circ T)\subseteq R(F)$ 且 $N(T)\subseteq N(F\circ T)$.

   (b) 利用 dimension theorem, 即 $\mathrm{rank}(F\circ T)=\dim(V)-\dim(N(F\circ T))$ 及 (a), 證明
   $$\mathrm{rank}(F\circ T)\le \mathrm{rank}(T).$$

   (c) 假設 W' 為 W 的 subspace, 考慮 $F':W'\to U$ 為將 F 的定義域限制在 W' 的 linear transformation (即 $F'(\mathbf{w})=F(\mathbf{w})$, $\forall \mathbf{w}\in W'$). 證明 $F'(W')=F(W')$ 且 $N(F')=N(F)\cap W'$, 並以此證明
   $$\dim(N(F))\ge \dim(W')-\dim(F(W')).$$

   (d) 考慮 (c) 中 $W'=T(V)$ 的情況，利用 $\mathrm{rank}(F)=\dim(W)-\dim(N(F))$ 證明
   $$\mathrm{rank}(F)\le \dim(W)-\mathrm{rank}(T)+\mathrm{rank}(F\circ T).$$

   (e) 結合 (a),(b),(d) 說明
   $$\mathrm{rank}(F)+\mathrm{rank}(T)-\dim(W)\le \mathrm{rank}(F\circ T)\le \min\{\mathrm{rank}(T),\mathrm{rank}(F)\}.$$