Linear Algebra (II) Exercise (Week 7)

April 03, 2024

1. 考慮 linear operator $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定義為 $T(x,y,z)=(y,-x,z)$. 令 A 為 T 的 standard matrix representation.
   (a) 令 β 為 $\mathbb{R}^3$ 的 ordered basis $(1,-1,1),(1,-2,2),(1,-2,1)$ 且令 B 為 T 的 matrix representation related to β. 試求 B，並寫出矩陣 P 使得 $A=P^{-1}BP$.
   (b) 令 $Q=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$. 試寫出 $\mathbb{R}^3$ 的 ordered basis γ, 使得 T 的 matrix representation related to γ 是 $Q^{-1}AQ$.

2. 假設 A,B 為 similar 的 n 階方陣.
   (a) 證明 A^{t}, B^{t} 也是 similar.
   (b) 證明若 A 為 invertible, 則 B 亦為 invertible. 並證明此時對任意 $k\in\mathbb{N}$, A^{-k} 和 B^{-k} 為 similar.

3. 考慮 linear operator $T:V\to V$, 且 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 T 的 eigenvectors 其對應的 eigenvalues 分別為 λ_1,λ_2. 已知 $\lambda_1\neq\lambda_2$.
   (a) 證明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 linearly independent.
   (b) 證明若 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$ 且 $c_1\neq 0,c_2\neq 0$, 則 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 不會是 T 的 eigenvector.
   (c) 證明若存在 $c_1,c_2\in\mathbb{F}$ 且 $c_1\neq 0,c_2\neq 0$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 為 T^2 的 eigenvector, 則 $\lambda_1=-\lambda_2$. 並說明對於 T^2 此 eigenvector $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2$ 的 eigenvalue 為何.

4. 考慮 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 定義為 $T(x,y,z)=(x+2y+z,y,x+3y+z)$. 令 $\mathbf{v}_1=(-1,0,1),\mathbf{v}_2=(3,-1,2),\mathbf{v}_3=(1,0,1)$.
   (a) 說明 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 皆為 T 的 eigenvector 並決定其對應的 eigenvalue.
   (b) 令 $\mathbf{v}=(1,-1,2)$, 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的線性組合, 並求 $T^3(\mathbf{v})$.
   (c) 考慮 ordered basis $\beta=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ 以及 standard ordered basis ε. 試寫下表現矩陣 $[T]_\varepsilon$ 以及 $[T]_\beta$.
   (d) 試寫下將 $[T]_\varepsilon$ 對角化成 $[T]_\beta$ 之間的關係式, 即找出互為 inverse 的矩陣 P,Q 使得 $Q[T]_\varepsilon P=[T]_\beta$. 並驗證之.

5. 考慮 $T_1,T_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 分別為對平面 $x-2y+z=0$ 的投影 (projection) 以及鏡射 (reflection) 的 linear operator.
   (a) 利用投影及鏡射的特性找出 $\mathbb{R}^3$ 的一組 basis $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 使其皆為 T_1,T_2 的 eigenvectors (Hint: 可考慮 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 互相垂直).
   (b) 令 β 為 ordered basis $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ 試寫下對角矩陣 $[T_1]_\beta$, $[T_2]_\beta$.
   (c) 利用 (b) 的結果寫出 T_1,T_2 在 standard ordered basis 之下的表現矩陣.

6. 假設 $T:V\to V$ 為 linear operator，考慮多項式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，定義 linear operator $f(T)=a_nT^n+\cdots+a_1T+a_0\mathrm{id}_V$。假設 $\mathbf{v}\in V$ 為 T 的一個 eigenvalue 為 λ 的 eigenvector. 證明 $\mathbf{v}$ 為 $f(T)$ 的 eigenvector, 並說明其對應的 eigenvalue 為何.