Linear Algebra (II) Exercise (Week 8)

April 12, 2024

1. 假設 $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 為 linear operator 且 $[T]_\varepsilon^\alpha=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, 其中 ε 為 standard ordered basis, 而 α 為 ordered basis $((1,-1),(1,-2))$.
   - (a) 試求 $T(1,0),T(0,1)$, 並以此得 $[T]_\varepsilon^\varepsilon$.
   - (b) 試寫下 α 到 ε 的基底變換矩陣，並利用它求 $[T]_\varepsilon^\varepsilon$(檢查是否與 (a) 相符).
   - (c) 利用 α 到 ε 的基底變換矩陣求 $[T]_\alpha^\alpha$ 以及 $[T]_\alpha^\varepsilon$.
   - (d) 試寫下 ε 到 α 的基底變換矩陣. 並利用 (c) 中所得的某個矩陣求 $[T]_\varepsilon^\varepsilon$.
   - (e) 利用以上這些有關 T 的矩陣之乘法寫下 $[T^2]_\alpha^\alpha$, $[T^2]_\alpha^\varepsilon$, $[T^2]_\varepsilon^\alpha$, $[T^2]_\varepsilon^\varepsilon$.
   - (f) 試求 $([T]_\varepsilon^\alpha)^{-1}$ 並說明它是 $[T^{-1}]_\varepsilon^\alpha$ 或是 $[T^{-1}]_\alpha^\varepsilon$. 並利用某個基底變換矩陣寫下 $[T^{-1}]_\varepsilon^\varepsilon$ 並以此寫下 $T^{-1}(x,y)$ 為何?

2. 考慮 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -6 & 4\\ -2 & -4 & 5\\ -2 & -6 & 7\end{bmatrix}$.
   - (a) 試分別求 A,B 的 characteristic polynomial.
   - (b) 試分別說明 A,B 的 eigenvalues 有哪些, 並計算每個 eigenvalue 的 algebraic multiplicity 和 geometric multiplicity.

3. 試找出 linear operators $T_1,T_2:P_3(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$ 的 eigenvalues 及其對應的 eigenspace 的 basis, 其中 $T_1(f(x))=xf'(x)$; $T_2(f(x))=x^2f''(x)-xf'(x)$.

4. 假設 V 為 over $\mathbb{F}$ 的 vector space 且 $T:V\to V$ 為 linear operator. 已知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 linearly independent 且滿足 $T(\mathbf{v}_1)=a\mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{v}_2)=b\mathbf{v}_1+c\mathbf{v}_2$，其中 $a,b,c\in\mathbb{F}$. 令 $W=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$. 試依是否 $a=c$ 討論 W 中所有可能 T 的 eigenvectors 及其對應的 eigenvalues.

5. 考慮所有 3×3 且只有一個 eigenvalue $\lambda=3$ 的實矩陣。請在下表空格中有符合條件的矩陣打 ✓，沒有符合的矩陣打 ✗。打 ✓的情形需舉例，打 ✗ 的情形需說明。其中 am 表示代數重根數、gm 表示幾何重根數（已知 $\mathrm{am}\geq\mathrm{gm}$）。

$\lambda=3$	$\mathrm{am}=0$	$\mathrm{am}=1$	$\mathrm{am}=2$	$\mathrm{am}=3$	$\mathrm{am}\geq 4$
$\mathrm{gm}=0$					
$\mathrm{gm}=1$					
$\mathrm{gm}=2$					
$\mathrm{gm}=3$					
$\mathrm{gm}\geq 4$					