**Linear Algebra (II) Exercise (Week 9)**
April 19, 2024

1. 假設 $T:V\to V$ 為 isomorphism.
   (a) 證明若 $\lambda$ 為 $T$ 的 eigenvalue, 則 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda^{-1}$ 為 $T^{-1}$ 的 eigenvalue.
   (b) 假設 $f(x),g(x)$ 分別為 $T$ 和 $T^{-1}$ 的 characteristic polynomial. 證明 $\lambda\in\mathbb{F}$ 滿足 $f(\lambda)=0$ 若且唯若 $g(\lambda^{-1})=0$.

2. 假設 $T:V\to V$ 為 linear operator, $\mathbf{v}\in V$ 且 $g(x)$ 為非零多項式。令 $W$ 為 $\mathbf{v}$ 所生成的 $T$-cyclic space 且令 $N$ 為 $g(T)$ 的 kernel.
   (a) 假設 $\dim(W)=k$. 證明對任意 $\mathbf{w}\in W$, 皆存在唯一的一個次數小於 $k$ 的多項式 $f(x)$ 使得 $\mathbf{w}=f(T)(\mathbf{v})$.
   (b) 證明 $N$ 為 $T$-invariant subspace.
   (c) 證明 $\mathbf{v}\in N$ 若且唯若 $W\subseteq N$.

3. 考慮 linear map $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, 定義為 $T(x,y,z,w)=(x+y+2z-w,y+w,2z-w,z+w)$. 令 $W=\{(x,y,0,0):x,y\in\mathbb{R}\}$, $U=\operatorname{Span}((1,1,0,1),(2,1,1,2),(1,-1,2,1))$.
   (a) 證明 $W$ 和 $U$ 皆為 $\mathbb{R}^4$ 中的 $T$-invariant subspace.
   (b) 分別找出 $W$, $U$ 中的 ordered basis $\beta=(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)$, $\gamma=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$。分別寫下 $T|_W$ 以 $\beta$ 所得的表現矩陣，以及 $T|_U$ 以 $\gamma$ 所得的表現矩陣.
   (c) 說明 $\alpha=(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ 可形成 $\mathbb{R}^4$ 的一組 ordered basis, 並寫下 $T$ 以 $\alpha$ 所得的表現矩陣. 計算 $T|_W$, $T|_U$ 以及 $T$ 的 characteristic polynomials. 並說明它們之間關係。
   (d) 分別找出 $T|_W$, $T|_U$ 以及 $T$ 的 eigenvalues，並說明它們的代數重根數與幾何重根數。

4. 考慮 $T_1:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 定義為 $T_1(a,b,c,d)=(a+b,b-c,a+c,a+d)$. 令 $W_1$ 為 $(1,0,0,0)$ 所產生的 $T_1$-cyclic space.
   (a) 試求 $W_1$ 的一組 ordered basis.
   (b) 試求 $T_1$ 限制在 $W_1$ 的 characteristic polynomial.

5. 考慮 $T_2:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ 定義為 $T_2(A)=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}A$. 令 $W_2$ 為 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 所產生的 $T_2$-cyclic space.
   (a) 試求 $W_2$ 的一組 ordered basis.
   (b) 試求 $T_2$ 限制在 $W_2$ 的 characteristic polynomial.

6. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) 試找到可逆矩陣 $U$ 以及對角矩陣 $D$ 使得 $A = UDU^{-1}$.

(b) 利用 $A = UDU^{-1}$ 計算 $A^4$.

(c) 利用 Cayley-Hamilton Theorem 計算 $A^4$.

(d) 利用 $A = UDU^{-1}$ 求 $A^{-1}$.

(e) 利用 Cayley-Hamilton Theorem 將 $A^{-1}$ 寫成 $A^2, A, I_3$ 的線性組合, 並以此寫出 $A^{-1}$.

(f) 利用 $A = UDU^{-1}$ 找到一矩陣 $B$ 滿足 $B^3 = A$.