Linear Algebra (II) Exercise (Week 12)

May 10, 2024

1. 對以下的矩陣試找到將其對角化的 orthogonal matrix 並找到其對應的對角矩陣.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. 假設 A 為實方陣。
   (a) 說明 $A^{\mathrm{t}}A$ is orthogonal diagonalizable 且其 eigenvalues 皆大於等於 0. (Hint: 利用矩陣乘法與內積的關係)
   (b) 假設 A 為 symmetric, 證明若對任意 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 皆有 $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, 則 A 為零矩陣.
   (c) 試找到一個 2 階方陣 A 滿足 $\langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ 但 A 不是零矩陣.

3. 試利用 Spectral Theorem (即對稱矩陣皆可正交對角化) 回答以下問題。
   (a) 給定 $k \in \mathbb{R}$ 試找到所有的實對稱矩陣 A 滿足 $\det A = k$ 且 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   (b) 假設 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 以標準基底寫下的矩陣為實對稱矩陣. 已知 2,5 為 T 的 eigenvalues 且 $(1,1,-1), (1,-1,0)$ 為 T 的兩個 eigenvalue 為 5 的 eigenvector. 試求 $T(1,1,2)$.
   (c) 找到實對稱矩陣 A 滿足僅有兩個 eigenvalues $1, 2$ 且 eigenvalue 2 的 eigenspace 為 $\mathrm{Span}((1,1,1))$.

4. 將以下的二元二次方程式經由坐標變換寫成標準式. 需寫下坐標如何變換. 並以新的坐標說明它們為何種二次曲線。以原來的坐標說明其圖形之重要參數（橢圓：頂點、長、短軸；雙曲線：頂點、貫軸、漸近線；拋物線：頂點、對稱軸）。
   (a) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$.
   (b) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 3x + 4y = 5$.
   (c) $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 4y = 6$.