

Linear Algebra (II) Exercise (Week 13)

May 17, 2024

- 設 $a, b \in \mathbb{R}$ 考慮二元二次方程式 $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2ax + 4ay = b$ 的圖形。
 - 請說明當 $a = 1$ 時, b 為多少時圖形會是退化的情形? 在非退化情形, b 改變時漸近線, 貫軸, 對稱軸方程式是否改變? 中心、焦點、頂點坐標是否改變?
 - 固定 $b \in \mathbb{R}$, 請說明當 a 為多少時圖形會是退化的情形? 在非退化情形, a 改變時焦距、貫軸長是否改變? 中心、焦點、頂點坐標是否改變? 漸近線, 貫軸, 對稱軸的斜率是否改變?
- 將以下的三元二次方程式經由坐標變換寫成標準式 (中心在原點). 需寫下坐標如何變換。
 - $3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 4$.
 - $2x^2 + 2xy + 2xz + 2yz - x + y + z = 1$.
 - $3x^2 + 2xz - y^2 + 3z^2 + 2y = 0$.
- 套用上題的結果, 寫下以下的三元二次方程式的圖形之相關參數。
 - $3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 4$. 說明此曲面之名稱。求中心軸的參數式, 以及一組平面方程式使得圖形與平面之截痕為橢圓。
 - $2x^2 + 2xy + 2xz + 2yz - x + y + z = 1$. 說明此曲面之名稱。求鞍點坐標、以及平面方程式使得圖形與平面之截痕為兩直線。
 - $3x^2 + 2xz - y^2 + 3z^2 + 2y = 0$. 說明此曲面之名稱。求 2 個頂點之坐標, 以及過頂點的切平面方程式。
- 給定 $r \in \mathbb{R}$. 考慮數列 a_0, a_1, a_2, \dots , 其中 $a_0 = 0, a_1 = 1$ 以及
$$a_k = ra_{k-1} + (1-r)a_{k-2}, \text{ for } k \geq 2.$$
 - 找到二階方陣 B 使得 $\begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \end{bmatrix}$. 並將 (a_1, a_0) 寫成 B 的兩個 eigenvectors 的線性組合。
 - 假設 $0 < |r-1| < 1$. 試說明數列 a_0, a_1, a_2, \dots 為 *neutrally stable* (意指不存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $a_m = a_N, \forall m > N$, 但 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ 存在), 並求其極限。
- 考慮函數 $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 定義為 $S(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i$. 對 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 令 $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, 定義為 $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. 令 $\varepsilon, \varepsilon'$ 分別為 \mathbb{R}^n 和 \mathbb{R} 的 standard ordered basis.
 - 試證明 S 為 linear map 且寫下 S 對 $\varepsilon, \varepsilon'$ 的表現矩陣 $[S]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$.
 - 考慮合成函數 $S \circ T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. 試說明 $[S \circ T_A]_{\varepsilon}^{\varepsilon'}$ 為何。
 - 假設 A 的每個 entry 皆為非負實數。證明 A 為 stochastic matrix 若且唯若 $S \circ T_A = S$.
 - 假設 A 為 stochastic matrix 且 $B \in M_n(\mathbb{R})$ 的每個 entry 皆為非負實數。利用函數合成的結合律 (即 $S \circ (T_A \circ T_B) = (S \circ T_A) \circ T_B$) 以及函數合成與矩陣乘法的關係證明 B 為 stochastic matrix 若且唯若 AB 為 stochastic matrix.
 - 試找到 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ 其中 A 和 BA 為 stochastic matrix 但是 B 並不是 stochastic matrix.