Linear Algebra (II) Exercise (Week 14)

May 24, 2024

1. 考慮 stochastic matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) 說明 A 為 regular stochastic matrix. (利用連續平方，以及矩陣乘法用 column, row 來處理會比較快）

   (b) 說明 A 是否為 diagonalizable.

   (c) 試求 $\lim_{k\to\infty} A^k$.

   (d) 給定 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, 已知 $a+b+c=r$. 試求 $\lim_{k\to\infty} A^k\mathbf{v}$.

2. 假設 A 為 invertible stochastic matrix.

   (a) 利用 $(1,\dots,1)^{\mathrm{t}}$ 為 A^{t} 的一個 eigenvalue 為 1 的 eigenvector, 證明 A^{-1} 的每一個 column vector 其 entry 之和為 1.

   (b) 試證明若 A 為 regular, 則 A^{-1} 一定不是 stochastic matrix.

3. 已知 A 為 regular stochastic matrix.

   (a) 證明若 $\mathbf{v}$ 為 A 的 eigenvector 且其 eigenvalue 為 1, 則 $\mathbf{v}$ 的每一個 entry 皆不等於 0.

   (b) 假設 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 為 diagonalizable 且 Q 為 invertible matrix 使得 $Q^{-1}AQ = D$, 其中 D 為 diagonal matrix 且其 $(1,1)$-entry 為 1. 利用 A^{t} 的 eigenvalue 為 1 的 eigenspace 為 $\mathrm{Span}(\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix})$ 以及 $Q^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}(Q^{-1})^{\mathrm{t}} = D$, 證明 Q^{-1} 的 1-st row 為 $(r,\dots,r)$ 其中 r 為非零實數。特別的若 Q 的 1-st column 為 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, 則 $r = (c_1+\cdots+c_n)^{-1}$.

4. 考慮以下三個 stochastic matrices.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

   (a) 請分別利用 A_1, A_2, A_3 的 eigenvalues 和 eigenvectors 說明為何 A_i 都不是 regular.

   (b) 將 $\mathbf{e}_2$ 分別寫成 A_i, $i=1,2,3$ 的 eigenvectors 的線性組合, 並以此求 $\lim_{k\to\infty} A_i^k\mathbf{e}_2$.

   (c) 對任意的 probability vector $\mathbf{v}$. 請回答以下問題並說明之。

      i. 那個 A_i 會使得 $\lim_{k\to\infty} A_i^k\mathbf{v}$ 一定存在且不管 $\mathbf{v}$ 為何都會趨近到同一個向量;

      ii. 那個 A_i 會使得 $\lim_{k\to\infty} A_i^k\mathbf{v}$ 一定存在但 $\mathbf{v}$ 改變會趨近於不同的向量;

      iii. 那個 A_i 會使得 $\lim_{k\to\infty} A_i^k\mathbf{v}$ 不一定存在.