

Exercise (Week 1)
September 06, 2022

1. 假設 A, B 為同階的矩陣。以下各小題中 A 經由一個 elementary row operation 變成 B , 請說明如何用同樣 type 的 elementary row operation 將 B 變回 A .
 - (a) A 經由將 i -th row 和 j -th row 交換的 type 1 elementary row operation 變成 B .
 - (b) A 經由將 i -th row 乘上非 0 實數 r 的 type 2 elementary row operation 變成 B .
 - (c) A 經由將 i -th row 乘上實數 r 加到 j -th row 的 type 3 elementary row operation 變成 B .
2. 考慮 type 1, type 2 以及 type 3 的 elementary row operations.

(a) 試著利用一些 type 3 以及 type 2 的 elementary row operations 將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換成 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) 證明所有 type 1 的 elementary row operation 皆可經由三次 type 3 的 elementary row operation 與一次 type 2 的 elementary row operation 得到。

(c) 利用習題 1 之 elementary row operation 的可逆性以及 (b) 說明某一個 row 乘上 -1 這種 type 2 的 elementary row operation, 也可經由三次 type 3 的 elementary row operation 與一次 type 1 的 elementary row operation 得到。

(d) 說明當 $a \neq \pm 1$ 時, 無法經一些 type 1 以及 type 3 的 elementary row operations 將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換成 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ (Hint: 觀察行列式的變化). (註: 這說明當 $a \neq \pm 1$ 時, 某一個 row 乘上 a 這種 type 2 的 elementary row operation 無法經由一些 type 1 和 type 3 的 elementary row operations 得到。)

(e) 說明無法經一些 type 1 以及 type 2 的 elementary row operations 將 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換成 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Hint: 觀察 0 的個數變化). (註: 這說明 type 3 的 elementary row operation 無法經由一些 type 1 和 type 2 的 elementary row operations 得到。)