

Exercise (Week 4)

October 15, 2021

1. 假設 $A = [a_{ij}] \in M_{3 \times 4}$, $B = [b_{ij}] \in M_{4 \times 3}$ 其中 $a_{ij} = i + j$, $b_{ij} = i \cdot j$.
 - (a) 試完整寫下矩陣 A 和 B .
 - (b) 試利用 B 的 3rd column 計算 AB 的 3rd column 並依所求結果寫下 AB 的 (2,3)-th entry.
 - (c) 試利用 A 的 2nd row 計算 AB 的 2nd row 並依所求結果寫下 AB 的 (2,3)-th entry.
 - (d) 直接利用內積方法計算 AB 的 (2,3)-th entry.
2. 假設 $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}$, $B = [b_{ij}] \in M_{n \times k}$ 且令 $AB = [c_{ij}]$. 令 $\mathbf{b}_k, \mathbf{c}_k$ 分別表示 B 和 AB 的 k th column. 已知 $\mathbf{b}_4 = r\mathbf{b}_1 + s\mathbf{b}_2 + t\mathbf{b}_3$ 其中 $r, s, t \in \mathbb{R}$. 證明 $\mathbf{c}_4 = r\mathbf{c}_1 + s\mathbf{c}_2 + t\mathbf{c}_3$.
3. 假設 A, B 皆為 n 階的 diagonal matrix 且設 A, B 的 (i, i) -th entry 分別為 a_i, b_i .
 - (a) 試證明 AB 也是 diagonal matrix 且寫下 AB 的 (i, i) -th entry. 並依此說明 A 和 B 是否為 commutative (即是否乘法可交換 $AB = BA$)?
 - (b) 試利用數學歸納法證明對任意 $k, m \in \mathbb{N}$, $A^k B^m$ 亦為 diagonal matrix.
4. 假設 A, B, C 皆為 n 階的 square matrices. 已知 A 和 C 為 commutative 且 B 和 C 為 commutative.
 - (a) 證明 $A + B$ 和 C 為 commutative.
 - (b) 試利用數學歸納法證明對任意 $k, m \in \mathbb{N}$, A^k 和 C^m 為 commutative.
5. 給定一實係數多項式 $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$. 對任意 n 階方陣 A , 定義 $f(A)$ 為 n 階方陣 $a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$, 其中 I_n 為 n 階單位矩陣. 請利用前面 3, 4 兩題回答以下問題.
 - (a) 若 A 為 diagonal matrix 證明 $f(A)$ 亦為 diagonal matrix.
 - (b) 假設 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. 對任意 n 階方陣 A, B , 若 A 和 B 為 commutative, 證明矩陣 $f(A)$ 和 $g(B)$ 亦為 commutative.