

## Exercise (Week 5)

October 22, 2021

1. 請證明以下有關 transpose matrix 的性質 (不難, 只要依定義處理即可)。

(a) 假設  $A_1, A_2, \dots, A_n$  為矩陣且  $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$  符合矩陣乘法。試利用數學歸納法證明

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n)^t = A_n^t \cdots A_2^t \cdot A_1^t.$$

(b) 假設  $A, B$  為  $n$  階 symmetric matrices. 證明  $AB$  為 symmetric matrix 若且唯若  $A, B$  為 commutative.

(c) 試說明 elementary matrix 的 transpose 亦為 elementary matrix (需說明原來對應的 elementary row operation 轉置後其所對應的 elementary row operation 為何)。

2. 對於  $n$  階 square matrix  $A$ , 若存在  $n$  階 square matrix  $B$  使得  $BA = I_n$  (或  $AB = I_n$ ), 則稱  $A$  為 invertible matrix 且稱  $B$  為其 inverse, 記為  $A^{-1}$ . 請證明以下有關 invertible matrix 的性質 (不難, 只要依定義處理即可)。

(a) 假設  $A_1, A_2, \dots, A_m$  為  $n$  階 invertible matrices。試利用數學歸納法證明

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

(b) 假設  $A$  為 invertible, 證明  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ , 並以此證明 invertible symmetric matrix 的 inverse 亦為 symmetric.

(c) 假設  $A$  為 invertible matrix, 對任意非零  $r \in \mathbb{R}$ , 證明  $rA$  亦為 invertible. 試找例子  $A, B$  為 invertible 但  $A+B$  不是 invertible.

(d) 假設  $A$  為  $n$  階 square matrix 滿足  $A^2 = O$ , 證明  $A$  為 non-invertible 但  $I_n - A$  為 invertible (Hint 利用  $I_n - A^2 = (I_n - A)(I_n + A)$ ). 請推廣到一般  $A^k = O$  的情況。

3. 令  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . 試回答以下問題。

(a) 試找到一個 invertible matrix  $E$  使得  $EA$  為 reduced echelon form.

(b) 試求  $\text{rank}(A)$  並說明對任意  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$  聯立方程組  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  皆在  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\ell$  有解, 其中  $k, \ell$  為何?

(c) 試找到一個 matrix  $C$  使得  $AC = I_4$ . 並說明可找到無窮多個  $C$  滿足  $AC = I_4$ .

(d) 試找到一個 matrix  $C'$  使得  $C'B = I_4$ .

(e) 試找到一個 invertible matrix  $E'$  使得  $E'B$  為 reduced echelon form, 並將  $E'$  的某些行或列去掉之後找到  $C'$  使得  $C'B = I_4$ .