

### Exercise (Week 6)

October 29, 2021

1. 考慮聯立方程組 
$$\begin{cases} x & + z = 1 \\ x + y & = 2 \\ 3x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}, \text{ 令 } A \text{ 為其係數矩陣且令 } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) 求  $\text{rank}(A)$  並說明此聯立方程組若有解是否解唯一。
- (b) 試找出矩陣  $D$  使得  $DA = I_3$ .
- (c) 試求  $D\mathbf{b}$  並利用  $\mathbf{x} = D\mathbf{b}$  代回聯立方程組說明為何此聯立方程組無解。

2. 考慮矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

- (a) 利用一些 elementary row operations 將  $A$  化成 reduced echelon form. 寫下每個 elementary row operation 所對應的 elementary matrix.
  - (b) 寫下  $A^{-1}$  並將  $A^{-1}$  寫成一些 elementary matrix 的乘積。
  - (c) 利用 (b) 的結果將  $A$  寫成一些 elementary matrix 的乘積。
3. 在講義 Proposition 2.5.5 我們證明了若  $A, B$  為方陣且  $AB$  為 invertible, 則  $A, B$  皆為 invertible, 且  $BA$  亦為 invertible. 利用類似的想法, 試回答以下問題, 假設  $AB$  為 invertible, 其中  $A$  為  $m \times n$  matrix,  $B$  為  $n \times n$  matrix 且  $m \neq n$ .

- (a) 試說明  $\text{rank}(A)$  與  $\text{rank}(B)$  為何.
- (b) 證明  $BA$  不是 invertible.

4. 給定一  $m \times n$  matrix  $A$ , 其中  $m \neq n$ . 假設  $B$  為  $n \times m$  matrix 滿足  $AB = I_m$ .

- (a) 試說明存在非零矩陣  $C$  使得  $AC = \mathbf{0}$ .
- (b) 試說明若矩陣  $D$  使得  $DA = \mathbf{0}$ , 則  $D = \mathbf{0}$ .
- (c) 試說明對於  $B$  相對應 (a), (b) 的結果為何。
- (d) 試說明當  $m = n$  的情形相對應 (a), (b) 的結果為何。

5. 假設  $A, B$  為  $n$  階 square matrices 滿足  $AB - I_n$  為 invertible.

- (a) 證明  $(BA - I_n)(B(AB - I_n)^{-1}A - I_n) = I_n$ . (Hint: 利用  $BAB = B(AB - I_n) + B$ )
- (b) 說明  $BA - I_n$  亦為 invertible.

6. 令  $A = [a_{ij}]$  為  $n$  階方陣, 其中  $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \neq j; \\ 0, & \text{if } i = j. \end{cases}$

- (a) 計算  $A^2$ .
- (b) 找到一個 2 次多項式  $f(x)$  滿足  $f(A) = \mathbf{0}$ , 並依此說明  $A$  為 invertible 且寫下  $A^{-1}$ .