

Exercise (Week 6)

October 29, 2021

1. 考慮聯立方程組
$$\begin{cases} x & + z = 1 \\ x + y & = 2 \\ 3x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}, \text{ 令 } A \text{ 為其係數矩陣且令 } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) 求 $\text{rank}(A)$ 並說明此聯立方程組若有解是否解唯一。
- (b) 試找出矩陣 D 使得 $DA = I_3$.
- (c) 試求 $D\mathbf{b}$ 並利用 $\mathbf{x} = D\mathbf{b}$ 代回聯立方程組說明為何此聯立方程組無解。

2. 考慮矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

- (a) 利用一些 elementary row operations 將 A 化成 reduced echelon form. 寫下每個 elementary row operation 所對應的 elementary matrix.
 - (b) 寫下 A^{-1} 並將 A^{-1} 寫成一些 elementary matrix 的乘積。
 - (c) 利用 (b) 的結果將 A 寫成一些 elementary matrix 的乘積。
3. 在講義 Proposition 2.5.5 我們證明了若 A, B 為方陣且 AB 為 invertible, 則 A, B 皆為 invertible, 且 BA 亦為 invertible. 利用類似的想法, 試回答以下問題, 假設 AB 為 invertible, 其中 A 為 $m \times n$ matrix, B 為 $n \times n$ matrix 且 $m \neq n$.

- (a) 試說明 $\text{rank}(A)$ 與 $\text{rank}(B)$ 為何.
- (b) 證明 BA 不是 invertible.

4. 給定一 $m \times n$ matrix A , 其中 $m \neq n$. 假設 B 為 $n \times m$ matrix 滿足 $AB = I_m$.

- (a) 試說明存在非零矩陣 C 使得 $AC = \mathbf{0}$.
- (b) 試說明若矩陣 D 使得 $DA = \mathbf{0}$, 則 $D = \mathbf{0}$.
- (c) 試說明對於 B 相對應 (a), (b) 的結果為何。
- (d) 試說明當 $m = n$ 的情形相對應 (a), (b) 的結果為何。

5. 假設 A, B 為 n 階 square matrices 滿足 $AB - I_n$ 為 invertible.

- (a) 證明 $(BA - I_n)(B(AB - I_n)^{-1}A - I_n) = I_n$. (Hint: 利用 $BAB = B(AB - I_n) + B$)
- (b) 說明 $BA - I_n$ 亦為 invertible.

6. 令 $A = [a_{ij}]$ 為 n 階方陣, 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \neq j; \\ 0, & \text{if } i = j. \end{cases}$

- (a) 計算 A^2 .
- (b) 找到一個 2 次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(A) = \mathbf{0}$, 並依此說明 A 為 invertible 且寫下 A^{-1} .