Exercise (Week 7)

November 05, 2021

1. 考慮集合
$$U = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ 且 } b > 0\}.$$
定義 U 上的加法運算為: 若 $\mathbf{u} = (a,b), \mathbf{v} = (c,d) \in U$, 則 $\mathbf{u}+\mathbf{v} = (ac,bd)$. 另外對任意 $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} = (a,b) \in U$ 定義係數積 $r\mathbf{u} = (a^r, b^r)$. 試回答以下問題.
   (a) 檢查 U 上的加法運算是否有封閉性, 以及係數積是否有封閉性, 即若 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ 以及 $r \in \mathbb{R}$ 是否 $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in U$? 是否 $r\mathbf{u} \in U$?
   (b) 檢查是否對任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$, 以及 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.
   (c) 試找出 $\mathbf{0} \in U$ 滿足對任意 $\mathbf{u} \in U$ 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$. 並對任意 $\mathbf{u} = (a,b) \in U$, 找出 $\mathbf{u}' \in U$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}' = \mathbf{0}$.
   (d) 對任意 $r,s \in R$ 以及 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, 分別討論 $r(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$; $(r+s)\mathbf{u} = r\mathbf{u}+s\mathbf{v}$; $(rs)\mathbf{u} = r(s\mathbf{u})$; $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ 是否成立.
   (e) U 是否為 vector space over $\mathbb{R}$? U 是否為 $\mathbb{R}^2$ (一般的加法與係數積) 的 subspace?
   (f) 假設 $\mathbf{v} = (25, 1/9), \mathbf{w} = (4,1)$ 且 $\mathbf{u} = (x,y)$ 在 U 中滿足 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v} = 5\mathbf{w}$. 利用定義分別寫下 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v}$ 以及 $5\mathbf{w}$ 的坐標表示法, 並依此解出 x,y.
   (g) 若給定 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U$ 已知 $\mathbf{u} \in U$ 滿足 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v} = 5\mathbf{w}$. 試將 $\mathbf{u}$ 寫成 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的線性組合. 假設 $\mathbf{v} = (25, 1/9), \mathbf{w} = (4,1)$. 若 $\mathbf{u} \in U$ 滿足 $2\mathbf{u}+3\mathbf{v} = 5\mathbf{w}$. 利用上述的線性組合, 解出 $\mathbf{u}$.
   (h) 下列哪些是 U 的 subspace, 並說明理由.
$$U_1 = \{(x,1) : x > 0\}; \quad U_2 = \{(2^r, 3^r) : r \in \mathbb{R}\};$$
$$U_3 = \{(x,y) : x > 1, y > 1\}; \quad U_4 = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq 1\}.$$

2. 考慮集合 $S = \{1,2\}$, 以及 vector space $\mathbb{R}^3$ (一般的加法與係數積). 令 $F(S,\mathbb{R}^3)$ 為所有 S 到 $\mathbb{R}^3$ 的函數所成的集合. 對任意 $f,g \in F(S,\mathbb{R}^3)$, $r \in \mathbb{R}$ 定義 $(f+g)(1) = f(1)+g(1), (f+g)(2) = f(2)+g(2)$ 以及 $(rf)(1) = r \cdot f(1), (rf)(2) = r \cdot f(2)$
   (a) 已知 $F(S,\mathbb{R}^3)$ 在此定義之下是一個 over $\mathbb{R}$ 的 vector space. 若 $h \in F(S,\mathbb{R}^3)$ 是此空間的零向量, 請寫下 $h(1), h(2)$.
   (b) 若 $f,g \in F(S,\mathbb{R}^3)$ 滿足
$$f(1) = (0,1,2), f(2) = (1,2,3); \quad g(1) = (-1,2,-1), g(2) = (2,0,1)$$
試寫下 $(3f-2g)$ 在 1, 2 的函數值.
   (c) 下列哪些是 $F(S,\mathbb{R}^3)$ 的 subspace, 並說明理由.
$$F_1 = \{f \in F(S,\mathbb{R}^3) : f(2) = (0,0,0)\}; F_2 = \{f \in F(S,\mathbb{R}^3) : f(1)+f(2) = (0,0,0)\}$$
$$F_3 = \{f \in F(S,\mathbb{R}^3) : f(1) \cdot f(2) = 0\}; F_4 = \{f \in F(S,\mathbb{R}^3) : f(1) = (x,y,z), xyz = 0\}$$
$$F_5 = \{f \in F(S,\mathbb{R}^3) : f(2) = (x,y,z), x+2y-z = 0\}.$$