Exercise (Week 9)

November 19, 2021

1. 考慮所有 n 階實方陣所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space M_n. 令 $W_1 = \{A \in M_n : A^t = A\}$, $W_2 = \{A \in M_n : A^t = -A\}$, $W_3 = \{[a_{ij}] \in M_n : a_{ij} = 0, \forall i \le j\}$.
   (a) 證明 W_1, W_2 為 M_n 的 subspace 且 $W_1 + W_2 = M_n$.
   (b) 證明 W_3 為 M_n 的 subspace 且 $W_1 + W_3 = M_n$.

2. 在以下的 vector space 中檢查是否 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 在 $\mathrm{Span}(S)$ 中.
   (a) $\mathbf{v} = (-1,1,1,2), \mathbf{w} = (2,-1,1,-3)$, $S = \{(1,0,1,-1),(0,1,1,1)\}$ in $\mathbb{R}^4$.
   (b) $\mathbf{v} = -x^3+2x^2+3x+3, \mathbf{w} = 2x^3-x^2+x+3$, $S = \{x^3+x^2+x+1, x^2+x+1, x+1\}$ in $P_3(\mathbb{R})$.
   (c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ in $M_2(\mathbb{R})$.

3. 在 $M_2(\mathbb{R})$ 中令 $W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ 以及

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   證明 $W = \mathrm{Span}(A_1, A_2, A_3)$ 並說明 $W \subsetneq \mathrm{Span}(A_1, A_2, A_4, A_5)$ 以及 $W \supsetneq \mathrm{Span}(A_3, A_6)$.

4. 假設 V 為 vector space 且 $S \subseteq V$. 證明 S 是 V 的 subspace 若且唯若 $\mathrm{Span}(S) = S$.

5. 請決定以下集合在所屬的 vector space 中是否為 linearly independent. 若為 linearly dependent, 試將其中一個元素表示成其他元素的線性組合.
   (a) $S_1 = \{(1,0,0),(1,2,-1),(0,1,1)\}$, $S_2 = \{(1,1,-1),(0,1,1),(1,2,0)\}$ in $\mathbb{R}^3$.
   (b) $S_3 = \{2x^2+x+1, x^2+3, x+2\}$, $S_4 = \{2x^2+x+1, 3x^2+x-5, x+13\}$ in $P_2(\mathbb{R})$.
   (c) $S_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}, S_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ in $M_2(\mathbb{R})$