

## Exercise (Week 10)

November 26, 2021

1. 假設  $A_1, \dots, A_k \in M_{m,n}$  為 linearly independent. 證明  $A_1^t, \dots, A_k^t \in M_{n,m}$  為 linearly independent.
2. 假設  $V$  為 vector space over  $\mathbb{F}$  且  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ . 令

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1.$$

- (a) 證明若  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  為 linearly independent, 則  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  為 linearly independent.
  - (b) 證明若  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  為 linearly independent, 則  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  為 linearly independent.
3. 假設  $V$  為 vector space over  $\mathbb{F}$  且  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$  為 linearly independent. 令

$$\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + b_1\mathbf{v}_2 + c_1\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 = a_2\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + c_2\mathbf{v}_3, \mathbf{w}_3 = a_3\mathbf{v}_1 + b_3\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3,$$

以及  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ . 證明  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  為 linearly independent 若且唯若  $A$  為 invertible.

4. 請決定以下集合是否為其所屬的 vector space 中的一組 basis.

(a) In  $\mathbb{R}^3$ ,

$$S_1 = \{(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)\}, \quad S_2 = \{(1, -3, -2), (-3, 1, 3), (-2, 10, -2)\}.$$

(b) In  $P_2(\mathbb{R})$ ,

$$S_3 = \{-2x^2 - 2x + 1, x^2 - 3x + 2, 6x^2 - x + 1\},$$

$$S_4 = \{x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x + 4, 9x^2 - 18x + 1\}.$$

5. 考慮  $V$  為 vector space over  $\mathbb{F}$  且  $S \subseteq V$  為 finite set 滿足  $\text{Span}(S) = V$ . 對於  $S$  的一個 subset  $S'$ , 我們稱  $S'$  為  $S$  的一個 *maximal linearly independent subset* 表示  $S'$  為 linearly independent 且任何比  $S'$  大的集合皆為 linearly dependent; 而稱  $S'$  為  $S$  的一個 *minimal spanning subset* 表示  $S'$  為  $V$  的 spanning set 且任何比  $S$  小的集合皆不是  $V$  的 spanning set. 現若  $S \subseteq S'$ , 證明以下是等價的.

(a)  $S'$  為  $V$  的一組 basis.

(b)  $S'$  為  $S$  的一個 maximal linearly independent subset.

(c)  $S'$  為  $S$  的一個 minimal spanning subset.