Exercise (Week 11)

December 03, 2021

1. 假設 W_1, W_2 皆為 V 的 subspace 且設 $\dim(W_1)=m, \dim(W_2)=n$.

   (a) 證明 $\dim(W_1 \cap W_2) \le \min(m,n)$ 且說明等號成立的充要條件.

   (b) 證明 $\dim(W_1+W_2) \le m+n$ 且說明當 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ 時 $\dim(W_1+W_2)=m+n$

   (Note: 事實上我們會有 $\dim(W_1+W_2)+\dim(W_1\cap W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)$, 大家不妨證明看看.)

2. 假設 V, W 皆為 over $\mathbb{F}$ 的 vector space. 令 $U=\{(\mathbf{v},\mathbf{w}):\mathbf{v}\in V, \mathbf{w}\in W\}$, 且定義 U 中的加法與係數積如下：

   $$(\mathbf{v},\mathbf{w})+(\mathbf{v}',\mathbf{w}')=(\mathbf{v}+\mathbf{v}',\mathbf{w}+\mathbf{w}'),\quad c(\mathbf{v},\mathbf{w})=(c\mathbf{v},c\mathbf{w}), \forall \mathbf{v},\mathbf{v}'\in V; \mathbf{w},\mathbf{w}'\in W; c\in\mathbb{F}.$$

   (a) 說明 U 為 vector space over $\mathbb{F}$.

   (b) 假設 $\dim(V)=m, \dim(W)=n$, 證明 $\dim(U)=m+n$.

3. 考慮所有 n 階實方陣所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space M_n. 令

   $$W_1=\{A\in M_n : A^{\mathrm{t}}=A\},\quad W_2=\{A\in M_n : A^{\mathrm{t}}=-A\},\quad W_3=\{[a_{ij}]\in M_n : a_{ij}=0, \forall i\le j\}.$$

   試求 $\dim(W_1)$, $\dim(W_2)$, $\dim(W_3)$ 以及 $\dim(W_1\cap W_2), \dim(W_1\cap W_3)$.

4. 給定 $n\in\mathbb{N}$, 令 $P_n(\mathbb{R})$ 表示所有次數小於等於 n 的實係數多項式所形成 over $\mathbb{R}$ 的 vector space.

   (a) 若 $m\le n+1$ 且 $f_1(x),\ldots,f_m(x)\in P_n(\mathbb{R})$ 為次數皆相異的非零多項式. 證明 $f_1(x),\ldots,f_m(x)$ 為 linearly independent.

   (b) 假設 $p_0(x), p_1(x),\ldots,p_n(x)\in P_n(\mathbb{R})$ 且 $\deg(p_i(x))=i$, $\forall i\in\{0,1,\ldots,n\}$ 其中 $p_0(x)\ne 0$. 證明 $p_0(x),p_1(x),\ldots,p_n(x)$ 為 $P_n(\mathbb{R})$ 的一組 basis.

5. 令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) 試求 A 的 nullity 並寫下 $N(A)$ 的一組 basis.

   (b) 試找到矩陣 B 使得 $N(B)=\mathrm{Col}(A)$, 並依此找出 $\mathrm{Col}(A)$ 的一組 basis.

   (c) 試利用 elementary row operations 在 A 的 column vectors 中找到一組 $\mathrm{Col}(A)$ 的 basis.

   (d) 試將 (c) 中 basis 的向量寫成 (b) 中的 basis 的線性組合.

   (e) 試利用 A^{t}, 找到 $\mathrm{Row}(A)$ 的一組 basis.

   (f) 找到 $N(A^{\mathrm{t}})$ 的一組 basis. 說明 $N(A^{\mathrm{t}})$ 和 $\mathrm{Col}(A)$ 的關係以及 $N(A)$ 和 $\mathrm{Row}(A)$ 的關係.