Exercise (Week 12)

December 10, 2021

1. 考慮所有次數小於等於 2 的實係數多項式所形成的 vector space $P_2(\mathbb{R})$. 令
$$S=\{2x^2-3x+1, x^2+4x-2, -8x^2+12x-4, x^2+37x-17, -3x^2-5x+8\}$$
且令 $V=\mathrm{Span}(S)$.
   (a) 試找到 S 的一個 subset 形成 V 的一組 basis.
   (b) 試將 S 中其他的元素寫成 (a) 中所得的 basis 的 linear combination.
   (c) 試說明 V 是否等於 $P_2(\mathbb{R})$.

2. 考慮所有 2×3 實矩陣所形成的 vector space 中的一個 subspace
$$V=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} : a_1-a_2+2b_1-3b_2+b_3=2a_1-a_2-a_3+3b_1-4b_2+4b_3=0\right\}.$$
考慮 $M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) 試找到 V 的一組 basis.
   (b) 說明 $M_1, M_2 \in V$ 且 M_1, M_2 為 linearly independent.
   (c) 擴充 M_1, M_2 使其形成 V 中的一組 basis.

3. 考慮 $\mathbb{R}^7$ 中的向量 $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 且令 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4)$.
   (a) 試找到矩陣 A 使得 $V=\mathrm{Col}(A)$, 且將 A 化成 echelon form 並說明如何依此找到 V 的一組 basis.
   (b) 試找到矩陣 B 使得 $V=\mathrm{Row}(B)$, 且將 B 化成 reduced echelon form 並說明如何依此找到 V 的一組 basis.
   (c) 若不限制 basis 的形式你覺得此題哪一個找 basis 的方法比較好? 試將其中一組 basis 寫成另一組 basis 的線性組合.

4. 考慮 $\mathbb{R}^4$ 中的兩個 subspace
$$W_1=\mathrm{Span}((1,1,1,1),(1,0,2,0),(0,2,1,1)), W_2=\mathrm{Span}((3,0,3,1),(3,2,3,2),(2,-1,2,0))$$
   (a) 找到矩陣 B_1, B_2 使得 $W_1=N(B_1)$, $W_2=N(B_2)$, 並以此找出 $W_1\cap W_2$ 的一組 basis.
   (b) 利用 $W_1\cap W_2$ 的 basis 分別擴充成 W_1+W_2 的一組 basis. 並以此驗算
$$\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2).$$