Chapter 1

Systems of Linear Equations

這一章要探討的是多元一次的聯立方程組. 我們依然利用大家熟悉的加減消去法 (或高斯消去法) 來處理這類方程組. 不過我們不再只關心如何解特定的聯立方程組, 而會更著重於有系統地探討一般聯立方程組解的情況的理論. 我們會用矩陣來表示一個聯立方程組, 不過這裡的矩陣僅是為了方便起見而使用, 不會涉及矩陣的性質. 至於真正矩陣的運算及性質, 我們留待下一章再詳述.

1.1. 一次聯立方程組及基本列運算

所謂 n 元一次的方程式就是有 n 個未知數 (variable) 的一次方程式 (linear equation). 例如 $2x_1+5x_2-x_3+x_4=1$ 就是一個 4 元一次的聯立方程組 (當然也可看成是 5 元或更高元). n 元一次的方程式抽象的表示法就是

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b,$$

其中這些 $a_1,\ldots,a_n$ 和 b 都是實數, 而這些 x_i 表未知數. 當我們有多個 n 元一次的方程式要討論它們的共同解時, 就稱為解一次聯立方程組 (system of linear equations). 一般抽象的表示法

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

表示有 m 個 n 元一次方程式所成的方程組 (system of m linear equations in n variables). 這裡 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$ 表示第一個方程式, $a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$ 表示第二個方程式, 而當 $1\leq i\leq m$ 時, 第 i 個方程式就是 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$, 所以最後一個 (即第 m 個) 方程式就是 $a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$. 這裡 a_{ij},b_i 皆為實數, 這些實數

才是真正影響到聯立方程組的因素, 所以我們也可特別把它們標明出來, 令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

然後將上面的聯立方程組用 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 來表示. 矩陣 A 中的每一個 a_{ij} 稱為 A 的一個 *entry*. 因為 A 的每一個 entry 對應到聯立方程組中某個未知數的係數, 通常我們會稱矩陣 A 為此聯立方程式的係數矩陣. 一個矩陣的一個橫排稱為一個 row (列), 而一個豎排稱為一個 column (行). 我們算 row 時是從上而下來數的, 也就是說最上面的一個 row 稱為第一個 row, 下一個 row 稱為第二個 row, 依此類推. 而算 column 是由左而右來數的, 也就是說最左邊的一個 column 稱為第一個 column, 再往右一個 column 稱為第二個 column, 依此類推. 大家可以看出矩陣 A 的 row 對應的就是此聯立方程組的方程式, 第一個 row 對應到第一個方程式, 第二個 row 對應到第二個方程式, 依此類推. 而 column 對應到的是方程組的未知數, 第一個 column 對應到的是未知數 x_1 的係數, 第二個 column 對應到的是未知數 x_2 的係數, 依此類推. 因為這裡是由 m 個方程式而且每個方程式有 n 個未知數所組成的聯立方程組, 所以 A 共有 m 個 row 以及 n 個 column, 我們稱這樣的矩陣為 $m\times n$ matrix. 注意這裡 $\mathbf{x}$ 表示是一個未知的向量而且我們將向量 $\mathbf{x},\mathbf{b}$ 都寫成 column vector (行向量) 是為了配合將來矩陣乘法的寫法. 目前大家只要記住這也是聯立方程式的一種表示法即可.

例如解聯立方程組

$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+9x_4 &= 4 \\ 2x_1+2x_2-4x_4 &= 6 \end{aligned} \tag{1.1}$$

我們就可以表成

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

注意這裡係數矩陣多出 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 這個 column 因為 x_3 的係數為 0.

過去學習解一次聯立方程組的方法不外加減消去法或高斯消去法, 它們的原理都是一樣的, 即利用以下三種基本方法:

(1) 變換式子的順序

(2) 將某一式乘上一非零實數

(3) 將某一式乘上一實數後加到另一式上

利用這三種基本方法將方程式的某些變數消去, 最後求出解來. 我們將介紹一個有系統的方法來解聯立方程組, 把這三種基本方法看成是對矩陣的運算.

當我們要解

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

這一個聯立方程組時, 先寫出如下的 augmented matrix (增廣矩陣)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

例如式子 (1.1) 中的聯立方程組所對應的 augmented matrix 為

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -4 & 6 \end{array}\right]$$

換言之, 若我們要解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 這一個聯立方程組, 就要寫下 $[A \mid \mathbf{b}]$ 這一個 matrix. 反之一個 augmented matrix $[A \mid \mathbf{b}]$ 就對應到一個聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

接下來我們將如加減消去法的三種步驟, 利用所謂的 elementary row operation (基本列運算) 處理這個 augmented matrix. 所謂 elementary row operation 即表示對矩陣進行如下三種的列運算:

(1) 將矩陣的某兩個 row 對調

(2) 將矩陣的某一個 row 乘上一非零實數

(3) 將矩陣的某一個 row 乘上一實數後加到另一個 row.

為了方便起見, 我們將上面 (1), (2), (3) 三種 elementary row operation 分別稱為 *type 1*, *type 2* 以及 *type 3* 的 elementary row operation.

Question 1.1. 任一 *type* 的 *elementary row operation* 可以用其他兩種 *type* 取代嗎?(參見習題)

Example 1.1.1. 考慮矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

將 A 的第一、第二兩個 row 互換 (即做一個 type 1 的 elementary row operation), 可得

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

而將 B 的第二個 row 乘上 2 (即做一個 type 2 的 elementary row operation), 可得

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

而將 C 的第三個 row 乘上 -3 加到第一個 row (即做一個 type 3 的 elementary row operation), 可得

$$D=\begin{bmatrix}-10 & 1 & -4 & -3\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 4 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

注意, 若一個矩陣 P 經由一個 elementary row operation 轉換成矩陣 Q, 我們也可以對 Q 藉由同樣 type 的 elementary row operation 將之轉換回 P. 例如前面 Example 1.1.1 中, 我們可以將 B 的第一、第二兩個 row 互換而得到 A. 我們也可將 C 的第二個 row 乘上 $1/2$ 而得到 B. 另外我們也可將 D 的第三個 row 乘上 3 加到第一個 row 而轉換回 C (參見習題).

Question 1.2. 兩個同樣 *type* 的 *elementary row operation* 交換順序會一樣嗎? 兩個不同 *type* 的 *elementary row operation* 交換順序會一樣嗎?