Chapter 3

Vector Spaces

在這一章中, 我們利用大家熟悉的坐標平面中的向量, 將之推廣到所謂的 vector space (向量空間) 這一種有特定代數結構的系統, 是線性代數中主要的探討對象.

3.1. 坐標平面中的向量

本節針對對抽象數學論述不熟悉的同學, 想利用大家熟悉坐標平面的向量慢慢引導進入狀況.

在平面中的向量我們可以用幾何的方式規定向量的加法及其倍數關係. 相信大家對這種定法已相當熟悉, 在這裡我們不再重複. 我們可以將平面坐標化, 這就是所謂的坐標平面. 這種在坐標平面中的向量, 我們都可用 (a,b) 來表示, 其中 $a,b\in\mathbb{R}$ (我們用 $\mathbb{R}$ 來表示所有實數所成的集合, 所以 $a,b\in\mathbb{R}$ 表示 a,b 皆為實數).

用坐標來表示一個向量 (即用 (a,b) 這種方法) 有許多好處, 例如大家很容易理解: 當兩個向量 (a,b) 和 (c,d) 相等時 (即 $(a,b)=(c,d)$), 這表示 $a=c$ 且 $b=d$; 坐標表示法的另一個好處是很容易幫助我們定義向量的加法 (*addition*) 以及係數積 (*scalar multiplication*).

Definition 3.1.1. 令 $\mathbf{u}=(a_1,a_2),\mathbf{v}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ 以及 $r\in\mathbb{R}$. 我們定義

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(a_1+b_1,a_2+b_2)\quad\text{and}\quad r\mathbf{u}=(ra_1,ra_2).$$

這裡我們要強調, Definition 3.1.1 中所定義的加法及係數積, 和矩陣的加法及係數積是一致的. 基於符號的方便性, 當我們要用符號來表示一個向量時, 會用 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 這類的粗體字符號來表示. 一般來說我們用 $\mathbb{R}^2$ 來表示坐標平面上的向量所成的集合, 所以若我們說 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, 就表示 $\mathbf{v}$ 是坐標平面上的一個向量, 也就是說可以找到 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{v}=(a,b)$.

一般來說有了定義之後, 我們就需依定義處理相關問題, 但通常直接依定義處理較繁複, 我們可已先依定義推導出一些性質, 利用這些性質簡化處理程序, 再處理更進一步的問題. 例如在微積分, 我們定義出一個函數在某一點的極限後, 若每次都得依定義處理極限問題論證起來很複雜; 但當我們利用定義推導出一些極限的性質後, 用這些性質處理極限問題就簡單方便多了. 所以在定義之後我們會有一些定理 (Proposition 或 Theorem) 來論證一些依

定義可得的性質, 以方便我們處理更進一步的問題. 以下就是要談向量加法及係數積有關的性質.

Proposition 3.1.2. 對於 $\mathbb{R}^2$ 上的向量, 我們有以下的性質:

(1) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

(2) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

(3) 存在一向量 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(4) 對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ 皆可找到 $\mathbf{u}'\in\mathbb{R}^2$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

(5) 對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(6) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $r(s\mathbf{u})=(rs)\mathbf{u}$.

(7) 對任意 $r\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ 皆有 $r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$.

(8) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $(r+s)\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$.

通常一個定理敘述完就要證明, 不過這幾項的證明都僅是一般制式的代數操作, 相信大家都很熟悉, 這裡就不再證明了. 對同學來說了解定理說些什麼比起證明來得重要. 在這裡我們就一一說明一下這個定理說些什麼.

(1) 敘述的是所謂向量加法的交換性. 它告訴我們在處理向量加法時可以依方便交換順序. 或許同學覺得這個很自然為何還要證明. 事實上只要是定義未提的事情都要證明, 不能因為覺得自然而不去處理. 在證明時會發現這個性質會成立主要是實數加法有交換性. 不過數學上是存在許多“抽象”的數系它的運算是不能交換的. 所以經由證明不只讓我們確認事情是對的, 也能幫助我們釐清事情是對的其背後的主要因素.

(2) 說的就是所謂的結合律, 它依然是因為實數加法的性質而成立. 這裡 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ 是說先將 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 相加後所得的向量再和 $\mathbf{w}$ 相加. 這樣所得的向量和先將 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 相加後再和 $\mathbf{u}$ 相加會是同樣的向量. 因為向量的加法是定義兩個向量的加法, 所以兩個以上的向量相加結合律就顯得重要了. 有了結合律, 我們就不必擔心哪兩個向量先加. 結合律雖然也是談向量加法的順序問題, 不過和 (1) 所談的順序是兩回事, 大家應該要分清楚.

(3) 談的就是所謂的零向量, 零向量的特點就是加上任何向量都不動. 為什麼要特別談零向量的存在性? 這就好比在實數上若沒有零的概念就沒有減法一樣, 在向量的運算上是相當重要的. 尤其以後要用抽象的方式談向量系統時零向量的存在性更不容忽視.

(4) 談的就是所謂的反向量, 要注意需有零向量的存在才能談反向量. 而且要區分清楚這裡的敘述是給了 $\mathbf{u}$ 後可找到 $\mathbf{u}'$ 使得 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$. 這裡 $\mathbf{u}'$ 是會隨著 $\mathbf{u}$ 而改變, 而不是一個固定的向量和所有的向量加起來會是零向量. 數學的敘述要弄清楚否則差之毫釐失之千里.

(5) 指的是所有向量乘上 1 後仍不動. 這裡特別提出來其實和零向量意義很像, 唯有 1 的引入以後才能談係數的除法. 例如已知 $2\mathbf{u}=\mathbf{v}$, 就可利用 (6) 的性質兩邊乘上 $1/2$, 得

$$\mathbf{u}=1\mathbf{u}=\frac{1}{2}(2\mathbf{u})=\frac{1}{2}\mathbf{v}.$$

(6),(7),(8) 談的是係數積的性質, 例如 $r(s\mathbf{u})$ 表示是先將 $\mathbf{u}$ 乘上 s 倍後所得的向量再乘上 r, 而 $(rs)\mathbf{u}$ 是表示先將 r,s 乘在一起得 rs 再乘上 $\mathbf{u}$. 這幾個性質也都和實數乘法性質息息相關, 雖然看起來不顯眼但在處理向量的運算時非常重要.

最後要強調一下: 這裡將這些性質列出, 並不是要求大家將這幾個性質背下來. 一來我們希望大家知道有些性質不能覺得理所當然就不去證明, 另一方面也讓大家知道以後在處理向量運算時可以放心且自然的使用這幾個性質. 這些性質也讓坐標平面上向量的系統享有許多豐富的性質.

Question 3.1. 利用 $\mathbb{R}^2$ 向量加法的定義, 試證明以下性質*:*

(1) $\mathbf{0}=(0,0)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中唯一的向量滿足對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(2) 給定 $\mathbf{u}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, 試證明 $\mathbf{u}'=(-a,-b)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中唯一的向量滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

坐標平面上向量的運算也可推廣到坐標空間, 即 $\mathbb{R}^3$. 同樣的概念也可推廣到更一般的 $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. 這些系統中的運算都享有 Proposition 3.1.2 的 8 項性質, 而這些性質讓這些系統有著豐富的性質. 所以接下來我們將專注於有這 8 項性質的系統, 稱之為 vector space (向量空間).

3.2. Vector Space 的定義及其基本性質

我們曾經提過像 $\mathbb{R}^2$ 這樣, 裡面任意兩個向量相加仍在 $\mathbb{R}^2$ 中且向量乘上任意的實數後也仍在 $\mathbb{R}^2$, 而向量的運算又符合 Proposition 3.1.2 的 8 項規則, 我們便稱之為 vector space. 在這一節中我們將正式定義 vector space 並探討 vector space 相關性質.

給定一非空集合 V, 我們說 V 中有加法運算 (addition) $+$, 表示對於任意 V 中兩個元素 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, 經由這個運算所得的結果 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 仍然是 V 中的元素 (此為加法封閉性). 至於係數積 (scaler multiplication) 我們要注意的是, 可以乘在向量上的數所在的數系必須像實數一樣有加法與乘法, 且加法, 乘法都是有交換律及結合律, 還有加法乘法之間要有分配律. 更重要的是這個數系裡非 0 的元素都有乘法反元素. 這樣的數系我們稱之為 *field* (體). 例如實數 $\mathbb{R}$ 和有理數 $\mathbb{Q}$ 在我們一般熟悉的加法, 乘法運算下都是 field, 但是整數 $\mathbb{Z}$ 就不是 field, 因為除了 ± 1 以外其他的非 0 整數在 $\mathbb{Z}$ 中就無法找到乘法反元素. 由於以後我們談的向量空間, 向量前所乘的係數所在的數系只要是 field, 則我們所要探討的性質都會成立. 所以係數積我們都不會強調是哪一個 field, 而用 $\mathbb{F}$ 來表示. 不過由於我們給的例子大多是係數積為 $\mathbb{R}$ 的情況, 所以若對 field 的概念覺得陌生, 不妨就用 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 的情況來思考即可. 現若 $\mathbb{F}$ 是一個 field, 我們說 $\mathbb{F}$ 對 V 有係數積表示對任意 $c\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{v}\in V$, 皆有 c 對 $\mathbf{v}$ 所得係數積 $c\mathbf{v}$ 仍然在 V 中 (此為係數積封閉性). 當一個集合 V 上有加法運算, 且 field $\mathbb{F}$ 對其有係數積, 則我們可以探討其是否為 vector space, 也就是說探討它是否符合以下之定義.

Definition 3.2.1. 假設非空集合 V 中有加法運算 $+$, 以及 field $\mathbb{F}$ 對 V 的係數積. 若這兩種運算符合以下 8 項性質, 則稱 V 為一個 *vector space over* $\mathbb{F}$.

(1) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

(2) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, 皆有 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

(3) 存在一向量 $\mathbf{0}\in V$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(4) 對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆可找到 $\mathbf{u}'\in V$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

(5) 對任意 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(6) 對任意 $r,s\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $r(s\mathbf{u})=(rs)\mathbf{u}$.

(7) 對任意 $r\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 皆有 $r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$.

(8) 對任意 $r,s\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $(r+s)\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$.

在此要說明一下, 一般來說我們不能說一個集合是 vector space, 一定要附帶說明它的加法及係數積為何. 不過當我們談到一般抽象的 vector space 時, 我們說 V 是一個 vector space over $\mathbb{F}$ 時就隱含其中有加法運算且直接用 $+$ 表示, 同時也隱含 $\mathbb{F}$ 是一個 field 且 V 中有 $\mathbb{F}$ 的係數積, 而不再去強調其中有加法及係數積. 同樣的對於常見的 vector space, 例如 $\mathbb{R}^n$, 由於我們已經有常用的加法及係數積, 所以不會再次強調其加法及係數積為何. 不過當我們要介紹一個新的具體的 vector space 時, 就一定要說明如何定出其加法及係數積. 尤其要注意, 我們必須明確說是 over 哪一個 field 的 vector space (以後我們會看到例子, 同樣的集合看成 over 不同的 field 的 vector space 影響會很大).

或許很多同學會疑惑, 為何在上一節中這 8 個性質是定理要證明, 而這一節中卻是定義不必證明呢? 要回答這個問題就要回歸到整個過程的演變. 上一節中我們定義了坐標平面向量加法及係數積, 然後驗證它們符合 Proposition 3.1.2 這 8 個性質. 而後由這些性質得到許多運算上很方便且豐富的性質. 事實上這些豐富的性質成立的原因, 主因並不是這些平面向量的加法和係數積是如何定義的, 而是由於它們符合 Proposition 3.1.2 這 8 個性質. 注意到這一點後, 我們專注於符合這 8 個性質的系統稱之為向量空間. 希望以後探討向量空間的問題, 可以不必用到它們真正的運算僅利用這 8 個性質就能得到向量空間所有的性質. 所以當我們想推導向量空間的性質時, 我們就可以直接套用定義中這 8 性質去推導, 這樣推導出來的結果便適用於所有的向量空間. 反過來說, 當我們遇到一個系統有加法, 有係數積, 只要我們能利用該系統的運算 "證明" 它符合這基本的 8 個性質, 那它就是向量空間. 因而所有向量空間的性質它都會符合了, 而不必再用該系統的運算一一去推導.

例如, 在 Question 3.1 中我們利用 $\mathbb{R}^2$ 加法的定義說明 vector space 性質 (3) 中 $\mathbf{0}$ 是唯一的而 (4) 中若給定 $\mathbf{u}$, 則反向量 $\mathbf{u}'$ 也是唯一的. 這兩個唯一性, 事實上不需要知道向量的加法如何定義, 直接用 vector space 的性質就可以證明, 也就是說這個結果對一般的 vector space 都成立. 首先我們看以下之定理.

Proposition 3.2.2. *假設 V 為 vector space, 且 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$. 若 $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, 則 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$.*

Proof. 利用 vector space 的性質 (4), 我們知道存在 $\mathbf{w}'\in V$ 滿足 $\mathbf{w}+\mathbf{w}'=\mathbf{0}$. 然而由 $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ 知 $(\mathbf{u}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'=(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'$. 左式由性質 (2),(3) 可得 $(\mathbf{u}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'=\mathbf{u}+(\mathbf{w}+\mathbf{w}')=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$. 同理右式可得 $(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'=\mathbf{v}+(\mathbf{w}+\mathbf{w}')=\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$, 得證 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$. □

Proposition 3.2.2 告訴我們以後在 vector space 處理向量加法問題時, 可以自然地像處理實數一樣使用消去法. 利用這個結果, 我們可以用來處理上述零向量以及反向量的唯一性.

Corollary 3.2.3. 假設 V 為 *vector space,* 則在 V 中存在唯一的向量 $\mathbf{0}$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 另外, 給定 $\mathbf{u}\in V$, 存在唯一的 $\mathbf{u}'\in V$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

Proof. 首先證明 $\mathbf{0}$ 是唯一的. 假設 $\mathbf{0}'$ 也滿足 (3) 的性質, 即對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}'+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 因此任取 $\mathbf{u}\in V$, 我們有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}=\mathbf{0}'+\mathbf{u}$, 故由 Proposition 3.2.2 知 $\mathbf{0}=\mathbf{0}'$, 得證唯一性.

另一方面, 給定 $\mathbf{u}\in V$, 若 $\mathbf{u}',\mathbf{u}''$ 皆滿足 (4) 的性質, 即 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{u}+\mathbf{u}''=\mathbf{0}$. 故由 Proposition 3.2.2 知 $\mathbf{u}''=\mathbf{u}'$, 得證唯一性. □

既然 $\mathbf{0}$ 是唯一的, 以後就用 $\mathbf{0}$ 這個專屬的符號來表示 V 中唯一符合 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, $\forall\mathbf{u}\in V$ 的這個元素, 且稱之為 V 的 *additive identity* 或依慣例稱之為 *zero vector.* 又給定 $\mathbf{u}\in V$, 存在唯一的 $\mathbf{u}'$ 使得 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$, 依慣例我們以後就用 $-\mathbf{u}$ 來表示這一個唯一的 $\mathbf{u}'$, 且稱之為 $\mathbf{u}$ 的 *additive inverse.* 而 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的 additive inverse $-\mathbf{v}$ 相加, 即 $\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$, 我們就用 $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ 來表示.

Question 3.2. 假設 V 為 *vector space.* 試證明對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $-(-\mathbf{v})=\mathbf{v}$.

接著我們要再強調的是, 雖然在性質 (3) 中提到 $\mathbf{0}$ 是必須滿足對所有 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$ 才可以 (事實上 Proposition 3.2.2 的證明需用到對所有 $\mathbf{u}$ 皆對才可以), 也就是說依定義要驗證對所有 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 才能確定 $\mathbf{w}$ 是零向量. 不過當我們確定 V 是 vector space 之後, 就可利用 Corollary 3.2.3, 知道只要有一個 $\mathbf{u}\in V$, 會使得 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 就可以認定 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ 了. 利用這一個唯一性, 我們可以推得許多有關於 $\mathbf{0}$ 的性質. 為了方便起見, 我們列出以下的結果.

Proposition 3.2.4. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, 我們有以下之結果.

(1) 若對於 $\mathbf{w}\in V$ 存在 $\mathbf{u}\in V$ 使得 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 則 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$.

(2) 對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(3) 對任意 $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $r\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(4) 對任意 $r\in\mathbb{F},\mathbf{v}\in V$ 皆有 $(-1)(r\mathbf{v})=-(r\mathbf{v})=r(-\mathbf{v})$.

Proof. (1) 由於 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{0}$ 皆滿足 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}=\mathbf{0}+\mathbf{u}$, 故利用 Proposition 3.2.2 推得 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$.

(2) 要證明 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 利用 (1), 我們只要檢查是否存在 $\mathbf{u}\in V$ 使得 $0\mathbf{v}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 事實上, 若考慮 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ 的情形, 此時因 $\mathbf{v}=1\mathbf{v}$, 故 $0\mathbf{v}+\mathbf{v}=0\mathbf{v}+1\mathbf{v}=(0+1)\mathbf{v}=1\mathbf{v}=\mathbf{v}$. 故得證 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(3) 同理, 利用 (1), 我們考慮 $\mathbf{u}=r\mathbf{0}$ 的情況, 此時 $r\mathbf{0}+\mathbf{u}=r\mathbf{0}+r\mathbf{0}=r(\mathbf{0}+\mathbf{0})=r\mathbf{0}=\mathbf{u}$, 得證 $r\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(4) 這裡要證明的是 $(-1)(r\mathbf{v})$ 和 $r(-\mathbf{v})$ 都是 $r\mathbf{v}$ 的 additive inverse (反向量). 由 Corollary 3.2.3 我們知到只要驗證它們是否加上 $r\mathbf{v}$ 都會是 $\mathbf{0}$ 即可. 然而由 (2) 我們有

$$(-1)(r\mathbf{v})+r\mathbf{v}=(-1)(r\mathbf{v})+1(r\mathbf{v})=(-1+1)(r\mathbf{v})=0(r\mathbf{v})=\mathbf{0}.$$

由 (3) 我們有

$$r(-\mathbf{v})+r\mathbf{v}=r(-\mathbf{v})+r(\mathbf{v})=r(-\mathbf{v}+\mathbf{v})=r(\mathbf{0})=\mathbf{0}.$$

因此得證 $(-1)(r\mathbf{v})=-(r\mathbf{v})=r(-\mathbf{v})$. □

由 Proposition 3.2.4 我們知當 $r=0$ 或 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 時會有 $r\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 但若 $r\neq 0$ 且 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, 是否有可能 $r\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 呢? 答案是不可能. 這是因為若 $r\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 首先由 $r\neq 0$ 且 $\mathbb{F}$ 是一個 field, 我們知道存在 $r'\in\mathbb{F}$ 滿足 $r'r=1$. 因此可以考慮 r' 乘上 $r\mathbf{v}$ 由 Proposition 3.2.4 (3) 得到 $r'(r\mathbf{v})=r'\mathbf{0}=\mathbf{0}$. 然而由 vector space 運算性質 (5), (6) 我們有 $r'(r\mathbf{v})=(rr')\mathbf{v}=1\mathbf{v}=\mathbf{v}$. 也就是說 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 此與假設 $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ 相矛盾, 故知 $r\mathbf{v}$ 絕對不會是 $\mathbf{0}$.

Question 3.3. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$.

(1) 已知 $\mathbf{v}\in V$ 且 $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$. 試證明若 $r,s\in\mathbb{F}$ 且 $r\mathbf{v}=s\mathbf{v}$, 則 $r=s$.

(2) 已知 $r\in\mathbb{F}$ 且 $r\neq 0$. 試證明若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 且 $r\mathbf{u}=r\mathbf{v}$, 則 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$.

利用以上結果證明若 V 是 *vector space over* $\mathbb{R}$ 且 V 中有非零元素, 則 V 有無窮多個元素.

總而言之, vector space 中所要求加法及係數積的 8 項性質, 就是要確保一個 vector space 中的元素運算都可像實數一般處理. 例如, 我們可以如實數一樣引用“減法”的符號, 也就是說將 $\mathbf{w}+(-\mathbf{v})$ 寫成 $\mathbf{w}-\mathbf{v}$. 如此一來以後我們在一些等式的推演時就直接沿用大家習慣的「移項」的說法. 例如 $2\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$, 我們就直接移項且乘以 $1/2$ 得 $\mathbf{u}=\frac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{v})$.

接下來我們看一些有關 vector space 的例子.

Example 3.2.5. (A) 考慮 S 為所有次數等於 2 的有理係數多項式所成的集合. 對 S 中兩多項式 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ 我們定義

$$f(x)+g(x)=(a+a')x^2+(b+b')x+(c+c').$$

S 在這加法定義下並無封閉性. 例如 $f(x)=x^2+2x+1\in S$ 且 $g(x)=-x^2\in S$, 但 $f(x)+g(x)=2x+1\notin S$. 所以在此加法下 S 不是 vector space. 現考慮 $P_2(\mathbb{Q})$ 為次數小於等於 2 的有理係數多項式所成的集合. 利用剛才的加法定義, 我們可得這個加法對 $P_2(\mathbb{Q})$ 有封閉性. 另外若對任意實數 $r\in\mathbb{R}$, 我們定義 r 對 $f(x)=ax^2+bx+c\in P_2(\mathbb{Q})$ 的係數積為 $r\cdot f(x)=(ra)x^2+(rb)x+(rc)$. 在此定義之下實數對 $P_2(\mathbb{Q})$ 的係數積並無封閉性, 例如 $\sqrt{2}$ 乘上 $P_2(\mathbb{Q})$ 的元素 x^2+x+1 會是 $\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}$ 就不再是 $P_2(\mathbb{Q})$ 的元素, 所以在此定義之下 $P_2(\mathbb{Q})$ 也不是 over $\mathbb{R}$ 的 vector space. 不過若同樣的定義考慮有理數 $\mathbb{Q}$ 對 $P_2(\mathbb{Q})$ 的係數積, 則會符合封閉性. 所以我們可以考慮 $P_2(\mathbb{Q})$ 是否是 vector space over $\mathbb{Q}$. 事實上我們很容易驗證此時的加法與係數積會符合 vector space 的 8 個性質, 所以在此定義之下 $P_2(\mathbb{Q})$ 確實是 vector space over $\mathbb{Q}$. 同樣的若 n 是正整數, 若令 $P_n(\mathbb{F})$ 為次數小於 n 且係數在 $\mathbb{F}$ 的多項式所成的集合, 利用上述加法及係數積的定義, 我們可得 $P_n(\mathbb{F})$ 是一個 over $\mathbb{F}$ 的 vector space.

(B) 對任意的 field $\mathbb{F}$, 考慮 $P(\mathbb{F})$ 為所有以 $\mathbb{F}$ 的元素為係數的多項式所成的集合. 利用如 (A) 中定義多項式的加法與係數積, 我們可以證明 $P(\mathbb{F})$ 為 vector space. 首先若

$f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0, g(x) = b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0 \in P(\mathbb{F})$, 其中 $m \leq n$, 則我們可以將 $g(x)$ 寫成 $g(x) = b_nx^n + \cdots + b_mx^m + \cdots + b_1x + b_0$, 其中 $b_n = b_{n-1} = \cdots = b_{m+1} = 0$. 為了方便起見雖然多項式的次數可能不同, 以後我們都用這種方式將它們補成相同次數再相加. 所以我們可以將 $f(x) + g(x)$ 的定義寫成 $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i$. 而對於 $r \in \mathbb{F}$, 係數積 $rf(x)$ 的定義為 $rf(x) = \sum_{i=0}^{n}(ra_i)x^i$. 利用這個定義以及 $\mathbb{F}$ 是 field 的假設, 我們知道在此定義之下加法和係數積確為 $P(\mathbb{F})$ 中的運算 (有封閉性). 接著我們要一一檢查是否符合 vectors space 的 8 項運算規則.

(1) 對任意 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \in P(\mathbb{F})$ 我們有
$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n}(b_i + a_i)x^i = g(x) + f(x).$$

(2) 對任意 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i, h(x) = \sum_{i=0}^{n} c_ix^i \in P(\mathbb{F})$ 我們有
$$(f(x) + g(x)) + h(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^{n} c_ix^i = \sum_{i=0}^{n}((a_i + b_i) + c_i)x^i,$$
$$f(x) + (g(x) + h(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n}(b_i + c_i)x^i = \sum_{i=0}^{n}(a_i + (b_i + c_i))x^i.$$
由於 $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$, 故得證 $(f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x))$.

(3) 考慮零多項式 $g(x) = 0 = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \in P(\mathbb{F})$, 其中 $b_i = 0$, $\forall i = 0, 1, \ldots, n$. 此時對任意 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in P(\mathbb{F})$, 可得
$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = f(x).$$

(4) 給定 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in P(\mathbb{F})$, 我們考慮 $h(x) = \sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i \in P(\mathbb{F})$, 則
$$f(x) + h(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i - a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} 0x^i = 0.$$

(5) 對任意 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in P(\mathbb{F})$, 皆有
$$1f(x) = \sum_{i=0}^{n}(1a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i = f(x).$$

(6) 對任意 $r, s \in \mathbb{R}$ 以及 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in P(\mathbb{F})$, 我們有
$$r(sf(x)) = r(\sum_{i=0}^{n}(sa_i)x^i) = \sum_{i=0}^{n}(r(sa_i))x^i = \sum_{i=0}^{n}((rs)a_i)x^i = (rs)\sum_{i=0}^{n} a_ix^i = (rs)f(x).$$

(7) 對任意 $r, s \in \mathbb{R}$ 以及 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in P(\mathbb{F})$, 皆有
$$(r + s)f(x) = \sum_{i=0}^{n}((r + s)a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n}(ra_i + sa_i)x^i = \sum_{i=0}^{n}(ra_i)x^i + \sum_{i=0}^{n}(sa_i)x^i = rf(x) + sf(x).$$

(8) 對任意 $r \in \mathbb{R}$ 以及 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \in P(\mathbb{F})$ 皆有
$$r(f(x) + g(x)) = r(\sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i) = \sum_{i=0}^{n}(r(a_i + b_i))x^i = \sum_{i=0}^{n}(ra_i + rb_i)x^i = rf(x) + rg(x).$$

因為 $P(\mathbb{F})$ 的加法與 $\mathbb{F}$ 的係數積符合 vector space 的 8 項運算規則, 所以在這個加法與係數積的運算之下 $P(\mathbb{F})$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$. 例如所有有理係數多項式所成的集合 $P(\mathbb{Q})$ 就是一個 over $\mathbb{Q}$ 的 vector space, 而實係數多項式所成的集合 $P(\mathbb{R})$ 就是一個 vector space over $\mathbb{R}$. 有趣的是 $P(\mathbb{R})$ 也是一個 vector space over $\mathbb{Q}$, 大家想想看為什麼.

(C) 給定任意 $n \in \mathbb{N}$, 以及一個 field $\mathbb{F}$. 我們令 $\mathbb{F}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{F}\}$. 我們沿用 $\mathbb{R}^2$ 中向量的加法及係數積來定義 $\mathbb{F}^n$ 中向量的加法以及係數積. 令 $\mathbf{u} = (a_1, \ldots, a_n), \mathbf{v} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{F}^n$ 以及 $r \in \mathbb{F}$. 我們定義

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \quad \text{and} \quad r\mathbf{u} = (ra_1, \ldots, ra_n).$$

依此定義我們很容易驗證此加法和係數積運算在 $\mathbb{F}^n$ 是封閉的, 而且符合 vector space 的 8 項運算規則, 所以在這個加法與係數積的運算之下 $\mathbb{F}^n$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$. 同樣的考慮所有 entry 皆為 $\mathbb{F}$ 中元素的 $m \times n$ 矩陣所成的集合 $M_{m,n}(\mathbb{F})$ 利用一般矩陣的加法及係數積, 我們也可驗證 $M_{m,n}(\mathbb{F})$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$.

(D) 給定一非空集合 S 以及 field $\mathbb{F}$, 我們令 $F(S, \mathbb{F})$ 表示所有定義域是 S 且對應域是 $\mathbb{F}$ 的函數所成的集合. 現若 $f, g \in F(S, \mathbb{F})$, 表示對任意 $s \in S$, $f(s), g(s)$ 都會是 $\mathbb{F}$ 中的元素. 所以我們定義 $f + g$ 為定義域是 S 且對應域是 $\mathbb{F}$ 的函數, 其定義為 $f + g$ 在任意 $s \in S$ 的取值為 $f(s) + g(s)$. 亦即 $(f + g)(s) = f(s) + g(s), \forall s \in S$. 對任意 $c \in \mathbb{F}$ 我們也定義 cf 為定義域是 S 且對應域是 $\mathbb{F}$ 的函數, 其定義為 cf 在任意 $s \in S$ 的取值為 $c \cdot f(s)$. 亦即 $(cf)(s) = c \cdot f(s), \forall s \in S$. 由於在此定義之下 $f + g$ 和 cf 仍然在 $F(S, \mathbb{F})$ 中, 所以此加法和係數積運算在 $F(S, \mathbb{F})$ 是封閉的. 我們可以驗證這兩種運算也符合 vector space 的 8 項運算規則, 所以在這個加法與係數積的運算之下 $F(S, \mathbb{F})$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$.

Question 3.4. 依照 *Example 3.2.5 (D)* 的定義, 試說明 $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$, $F(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})$ 以及 $F(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ 中那些是 *vector space over* $\mathbb{R}$? 哪些是 *vector space over* $\mathbb{Q}$?

3.3. Subspaces

在這一節, 我們介紹 subspace 的概念, 簡單地說, 對於一個 vector space 的非空子集合, 如果在此 vector space 的加法及係數積運算之下這個子集合亦為 vector space, 則稱為此 vector space 的 *subspace*.

Definition 3.3.1. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 W 為 V 的 nonempty subset. 若對 W 的元素利用原先 V 的加法及 $\mathbb{F}$ 係數積運算之下 W 亦為 vector space, 則稱 W 為 V 的 *subspace*.

雖然一個 vector space 的 subspace 仍為 vector space, 但要檢查是否為 subspace 不必像檢查 vector space 一樣要去檢查 8 項的運算規則. 這是因為原本 vector space 的 8 項運算規則中除了 (3)(4) 兩項會和所在的集合有關外, 其他各項僅是元素間的運算規則, 和所在的集合無關. 以下的定理告訴我們要辨認是否為 subspace, 只要檢查封閉性即可.

Proposition 3.3.2. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W 為 V 的非空子集合. 則 W 為 V 的 *subspace* 若且唯若對任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ 且 $r \in \mathbb{F}$ 皆有 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ 以及 $r\mathbf{u} \in W$.

Proof. 首先假設 W 為 V 的 subspace. 由於 vector space 的首要條件就是加法與係數積的封閉性, 因此依 subspace 的定義 W 在 V 的加法以及係數積之下應有封閉性, 亦即對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$ 且 $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$ 以及 $r\mathbf{u}\in W$.

反之, 若 W 在 V 的加法以及係數積之下應有封閉性, 則依定義若此加法及係數積符合 vector space 的 8 項性質, 則 W 就是 over $\mathbb{F}$ 的 vector space, 因此依定義就是 V 的 subspace. 然而這 8 項性質中除了 (3), (4) 兩項外, 其餘了性質由於在 V 中的元素皆成立, 所以當然限制在 W 上依然成立. 因此我們僅要驗證 (3), (4) 兩項即可.

性質 (3) 要求的是在 W 中存在一元素 $\mathbf{w}\in W$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in W$ 皆有 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 然而由於這些元素皆在 V 中, 而 Proposition 3.2.4 (1) 告訴我們此 $\mathbf{w}$ 就是 V 的 zero vector $\mathbf{0}$. 所以我們要檢查的是 $\mathbf{0}\in W$. 現因 W 不是空集合, 所以必定存在 $\mathbf{u}\in W$, 此時因 $0\in\mathbb{F}$ 且由封閉性 $0\mathbf{u}\in W$, 因此由 Proposition 3.2.4 (2) 得證 $\mathbf{0}=0\mathbf{u}\in W$.

性質 (4) 要求的是對任意 W 中的元素 $\mathbf{u}\in W$ 皆存在 $\mathbf{u}'\in W$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$. 由於 $W\subseteq V$, $\mathbf{u}$ 亦在 V 中, 故由 additive inverse 的唯一性 (Proposition 3.2.3知 $\mathbf{u}'=-\mathbf{u}$ 再由 Proposition 3.2.4 (4) 知 $-\mathbf{u}=(-1)\mathbf{u}$. 因此由 $-1\in\mathbb{F}$ 以及係數積的封閉性知 $-\mathbf{u}\in W$. □

注意在這個證明裡, 我們僅利用係數積的封閉性證明 (3), (4) 成立, 不過在驗證 subspace 時一定還要驗證加法的封閉性, 否則無加法封閉性根本沒資格成為 vector space.

一個 vector space V 中有兩個 trivial subspace, 即 V 和 $\{\mathbf{0}\}$. 其中 $\{\mathbf{0}\}$ 稱為 *zero subspace* of V, 以後我們用 $\mathbf{O}$ 來表示. 例外要注意 subspace 不能是空集合, 又因為 $\mathbf{0}$ 一定在其中, 所以以後檢查 V 中的子集合是否為 subspace, 我們可以先檢查 $\mathbf{0}$ 是否在其中. 一來可以知道它是不是空集合, 而且若 $\mathbf{0}$ 不在其中就可以斷定它不是 subspace, 真是一舉兩得啊! 以下我們寫下一個檢查是否為 subspace 更簡明的方法.

Corollary 3.3.3. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W 為 V 的子集合. 則 W 為 V 的 *subspace* 若且唯若 $\mathbf{0}\in W$ 且對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$, $r\in\mathbb{R}$ 皆有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$.

Proof. $(\Rightarrow)$: 依 subspace 的定義, 加法及係數積皆有封閉性, 故對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$, $r\in\mathbb{F}$ 由係數積的封閉性得 $r\mathbf{v}\in W$ 再由加法封閉性得 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$. 又依定義 W 為非空集合, 故必存在一向量 $\mathbf{w}\in W$. 現考慮 $0\mathbf{w}$, 依封閉性 $0\mathbf{w}\in W$. 又因 V 為 vector space, 我們知 $0\mathbf{w}=\mathbf{0}$ (Proposition 3.2.4(2)). 故得證 $\mathbf{0}=0\mathbf{w}\in W$.

$(\Leftarrow)$: 由 $\mathbf{0}\in W$, 我們知 W 為 V 的非空子集合. 故由 Proposition 3.3.2, 我們僅要證明 W 有加法和係數積的封閉性. 我們要用對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$, $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$ 這個假設證明封閉性. 因 $1\in\mathbb{F}$, 故對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$ 考慮 $r=1$ 的情形可得 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$, 證得加法封閉性. 又若 $\mathbf{v}\in W$ 以及 $r\in\mathbb{F}$, 因為已知 $\mathbf{0}\in W$, 故考慮 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 的情形得證 $r\mathbf{v}=\mathbf{0}+r\mathbf{y}\in W$. □

由 Corollary 3.3.2, 我們知道要檢查一個 vector space V 中的子集合 W 是否為 V 的 subspace, 我們僅要檢查

(1) $\mathbf{0}\in W$

(2) $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W,\ r\in\mathbb{F}\Rightarrow \mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$.

是否成立即可. 我們看以下的例子.

Example 3.3.4. (A) 考慮 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 即所有 entries 在 $\mathbb{F}$ 中的 $m\times n$ matrices 所成的 vector space. 所謂 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 *upper triangular* matrix 表示當 $i>j$ 時該矩陣第 (i,j)-th entry 為 0. 我們要證明 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 upper triangular matrix 所成的集合是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先觀察 $m\times n$ 階零矩陣, 由於其任意 entry 皆為 0, 當然 (i,j)-th entry 當 $i>j$ 時亦為 0, 因此零矩陣是 upper triangular. 現考慮 $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 皆為 upper triangular, 設 a_{ij}, b_{ij} 分別表示 A,B 的 (i,j)-th entry. 對任意 $r\in\mathbb{F}$, 我們有 $A+rB$ 的 (i,j)-th entry 為 $a_{ij}+rb_{ij}$. 現當 $i>j$ 時 $a_{ij}=b_{ij}=0$, 故得 $a_{ij}+rb_{ij}=0$. 證得 $A+rB$ 亦為 upper triangular. 因此得證 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 upper triangular matrix 所成的集合是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace.

(B) 考慮 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 即所有 entries 在 $\mathbb{F}$ 中的 $n\times n$ 方陣所成的 vector space. 我們想知道 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 symmetric matrices (對稱矩陣) 所成的集合是否為 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先回顧, 對一個 $m\times n$ matrix A, 我們定義 A 的 *transpose* 為一個 $n\times m$ matrix, 記為 A^{t}, 滿足對任意 $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$, A^{t} 的 (i,j)-th entry 為 A 的 (j,i)-th entry. 利用矩陣加法及係數積運算, 我們很容易驗證對任意 $m\times n$ 矩陣 A,B 以及 $r\in\mathbb{F}$ 皆滿足 $(A+rB)^{\mathrm{t}}=A^{\mathrm{t}}+(rB)^{\mathrm{t}}=A+rB$. 現回到對稱矩陣的定義, 對於 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 我們稱 A 為 symmetric matrix, 表示 $A^{\mathrm{t}}=A$. 很明顯的 $n\times n$ 階零矩陣 $\mathbf{0}$ 為 symmetric matrix. 而若 $A,B\in\mathscr{M}_{n\times n}$ 滿足 $A^{\mathrm{t}}=A,B^{\mathrm{t}}=B$, 則對任意 $r\in\mathbb{R}$, 利用 $A^{\mathrm{t}}=A,B^{\mathrm{t}}=B$, 我們有 $(A+rB)^{\mathrm{t}}=A^{\mathrm{t}}+(rB)^{\mathrm{t}}=A+rB=A+rB$. 亦即 $A+rB$ 亦為 symmetric matrix, 得證 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 symmetric matrices 所成的集合為 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace.

$M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 invertible matrices (可逆矩陣) 所成的集合是否為 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace 呢? 答案是否定的. 很明顯的零矩陣 $\mathbf{0}$ 就不是 invertible, 所以由 $\mathbf{0}$ 不在其中就可得 $\mathscr{M}_{n\times n}$ 中所有的 invertible matrices 所成的集合不是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 其實即使我們考慮 invertible matrices 所成的集合與 $\{\mathbf{0}\}$ 的聯集, 仍不會是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 因為即使此時 $\mathbf{0}$ 在其中, 但仍有可能兩個 invertible matrices 相加後就不是 invertible. 例如在 2×2 的情形, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 皆為 invertible, 但是 $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ 不是 invertible.

(C) 考慮 $P(\mathbb{F})$, 即所有以 $\mathbb{F}$ 的元素為係數的多項式所成的 vector space. 給定一自然數 $n\in\mathbb{N}$, 我們說明所有次數小於等於 n 的多項式所成的集合 $P_n(\mathbb{F})$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先我們可以將 $P_n(\mathbb{F})$ 寫成 $P_n(\mathbb{F})=\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\mid a_i\in\mathbb{F}\}$. 很明顯的零多項式屬於 $P_n(\mathbb{R})$ (注意一般數學上定義零多項式的次數為 $-\infty$, 而不是 0. 這個部分以後代數課程會去談論, 這裡就不多談). 又若 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in P_n(\mathbb{R})$, 則對任意 $r\in\mathbb{R}$, 我們有 $f(x)+rg(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+rb_i)x^i\in P_n(\mathbb{R})$. 故知 $P_n(\mathbb{F})$ 為 $P(\mathbb{F})$ 的 subspace. 要注意, 若僅考慮次數等於 n 的多項式所成的集合, 那麼就不會是 $P(\mathbb{F})$ 的 subspace 了. 很明顯的零多項式就不會在裡面. 又即使加入零多項式, 但仍有可能兩個次數為 n 的多項式相加之後其次數變小了, 例如 $(x^2+x+1)+(-x^2+x+1)=2x+2$. 也就是說在這情況之下加法是不封閉的, 所以無法成為一個 vector space.

(D) 對一非空集合 S 以及 field $\mathbb{F}$, 考慮 $F(S,\mathbb{F})$ 為所有從 S 映射到 $\mathbb{F}$ 的函數所成的 vector space. 現假設 T 是 S 的一個非空子集合, 考慮 $N_T = \{f \in F(S,\mathbb{F}) : f(t) = 0, \forall t \in T\}$, 亦即 N_T 為 S 到 $\mathbb{F}$ 的函數, 但將 T 中的元素都映射到 0. 我們要說明 N_T 是 $F(S,\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先 $F(S,\mathbb{F})$ 中的 zero vector $\mathbf{0}$ 就是零函數, 也就是把 S 中的元素都映射到 0 的函數. 現由於 $T \subseteq S$, 所以此零函數當然把 T 中的元素都映射到 0. 得證 $\mathbf{0} \in N_T$. 現若 $f,g \in N_T$ 且 $r \in \mathbb{F}$. 依定義 $(f+rg)(s) = f(s)+rg(s)$, $\forall s \in S$, 故由 $f,g \in N_T$ 的假設知對任意 $t \in T$, $(f+rg)(t) = f(t)+rg(t) = 0+0 = 0$, 得證 $f+rg \in N_T$, 也因此證明了 N_T 是 $F(S,\mathbb{F})$ 的 subspace.

Question 3.5. 在 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 這個 *vector space* 中, 考慮在固定的特定位置 *(*例如對角線位置*)* 為 0 的矩陣所成的集合, *(*例如對角線位置皆為 0 的矩陣所成的集合*)*. 試問這樣的集合是否為 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 *subspace?* 又若考慮在固定的特定位置皆不是 0 的矩陣所成的集合, 是否為 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 *subspace?*

Subspace 是 vector space 中特殊的子集合, 所以我們當然希望能利用已知的 subspace "製造" 出新的 subspace. 這裡我們介紹兩種常見的方法.

Proposition 3.3.5. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W_1, W_2 為 V 的 *subspace,* 則 $W_1 \cap W_2$ 亦為 V 的 *subspace.*

Proof. 首先 W_1, W_2 為 subspace, 故 $\mathbf{0} \in W_1$ 且 $\mathbf{0} \in W_2$, 故得 $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$. 現若 $\mathbf{u},\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ 且 $r \in \mathbb{F}$, 由於 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 皆屬於 W_1 且 W_1 是 subspace, 故知 $\mathbf{u}+r\mathbf{v} \in W_1$, 同理可得 $\mathbf{u}+r\mathbf{v} \in W_2$, 故得證 $\mathbf{u}+r\mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$. □

Question 3.6. 證明任意多個 V 的 *subspace* 的交集依然是 V 的 *subspace. (*注意不要用數學歸納法, 數學歸納法僅能證明有限多個的情況*)*

雖然兩個 subspaces 的交集仍為 subspace, 但他們的聯集就未必是 subspace 了. 當然了, 當 W_1, W_2 為 V 的 subspace, 若 $W_1 \subseteq W_2$, 則 $W_1 \cup W_2 = W_2$ 當然就是 V 的 subspace. 同樣的, 若 $W_2 \subseteq W_1$, 則 $W_1 \cup W_2 = W_1$ 當然也是 V 的 subspace. 下一個定理就是告訴我們, 除了這兩個明顯的情況外, 兩個 subspaces 的聯集不會是 subspace.

Proposition 3.3.6. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W_1, W_2 為 V 的 *subspace.* 若 $W_1 \not\subseteq W_2$ 且 $W_2 \not\subseteq W_1$, 則 $W_1 \cup W_2$ 不是 V 的 *subspace.*

Proof. 依假設 $W_1 \not\subseteq W_2$ 表示存在一個元素在 W_1 中但不在 W_2, 我們假設 $\mathbf{w}_1 \in W_1$ 但 $\mathbf{w}_1 \not\in W_2$, 同理由 $W_2 \not\subseteq W_1$, 我們假設 $\mathbf{w}_2 \in W_2$ 但 $\mathbf{w}_2 \not\in W_1$. 當然了, 依定義我們有 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W_1 \cup W_2$, 我們要利用 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 這兩個 $W_1 \cup W_2$ 中的元素說明 $W_1 \cup W_2$ 在加法之下沒有封閉性, 因此得證 $W_1 \cup W_2$ 不是 V 的 subspace.

我們用反證法，假設 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1 \cup W_2$. 這表示 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1$ 或 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_2$. 若 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1$, 由 $\mathbf{w}_1 \in W_1$ 以及 W_1 為 vector space, 得 $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) - \mathbf{w}_1 \in W_1$. 此與 $bw_2 \not\in W_2$ 相矛盾. 同理若 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_2$, 我們也會推得 $\mathbf{w}_1 \in W_2$ 的矛盾. 因此知 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \not\in W_1 \cup W_2$, 得證 $W_1 \cup W_2$ 不是 V 的 subspace. □

從 Proposition 3.3.6 的證明中, 我們發現 $W_1 \cup W_2$ 不是 vector space 最主要的原因是沒有加法封閉性 (它有係數積的封閉性), 我們可以考慮以下的集合故意收集加法所得的元素讓它有加法封閉性.

Definition 3.3.7. 假設 V 為 vector space W_1, W_2 為其 subspace, 定義集合

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$$

並稱之為 the *sum* of W_1 and W_2.

對任意 $\mathbf{w}_1 \in W_1$, 由於 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{0}$, 且 $\mathbf{0} \in W_2$ (因 W_2 為 subspace), 我們有 $\mathbf{w}_1 \in W_1 + W_2$, 亦即 $W_1 \subseteq W_1 + W_2$. 同理可得 $W_2 \subseteq W_1 + W_2$. 以下定理告訴我們 $W_1 + W_2$ 也會是 V 的 subspace, 事實上它是包含 W_1 和 W_2 最小的 subspace.

Proposition 3.3.8. *假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 W_1, W_2 為 V 的 subspace, 則 $W_1 + W_2$ 也是 V 的 subspace. 特別若 W 是 V 的 subspace 且滿足 $W_1 \subseteq W$ 以及 $W_2 \subseteq W$, 則 $W_1 + W_2 \subseteq W$.*

Proof. 首先因 $\mathbf{0} \in W_1$ 且 $\mathbf{0} \in W_2$, 故由 $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ 可得 $\mathbf{0} \in W_1 + W_2$. 現若 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ 且 $r \in \mathbb{F}$, 此時由 $\mathbf{u} \in W_1 + W_2$, 知存在 $\mathbf{u}_1 \in W_1$ 以及 $\mathbf{u}_2 \in W_2$ 使得 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, 同理存在 $\mathbf{v}_1 \in W_1$ 以及 $\mathbf{v}_2 \in W_2$ 使得 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. 因此 $\mathbf{u} + r\mathbf{v} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + r(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + r\mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + r\mathbf{v}_2)$. 然而 W_1 是 subspace, 由 $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in W_1$ 以及 $r \in \mathbb{F}$ 知 $\mathbf{u}_1 + r\mathbf{v}_1 \in W_1$. 同理知 $\mathbf{u}_2 + r\mathbf{v}_2 \in W_2$, 故得 $W_1 + W_2$ 是 V 的 subspace.

現對任意 $\mathbf{u} \in W_1 + W_2$, 因為存在 $\mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2$ 滿足 $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, 故由 $W_1 \subseteq W$ 以及 $W_2 \subseteq W$ 知 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, 因此由 W 是 subspace 知 $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$, 得證 $W_1 + W_2 \subseteq W$. □

Question 3.7. *假設 $n \geq 3$, $W_1, W_2, \ldots, W_n$ 皆為 vector space V 的 subspaces. 學習 Definition 3.3.7 的定義方法, 你覺得要如何定義 $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ 才能讓它為包含 $W_1, W_2, \ldots, W_n$ 最小的 subspace 呢?*