3.4. Linear Combination and Span of Vectors

在這一節中, 我們將介紹線性組合的概念.

當 V 是 vector space over $\mathbb{F}$, 要如何得到 V 的 subspace 呢? 我們可以在 V 中先找到一個 $\mathbf{v} \in V$ 然後找包含 $\mathbf{v}$ 的集合使其為包含 $\mathbf{v}$ 最小的 subspace. 首先這個集合必須包含所有 $\mathbb{F}$ 中的元素與 $\mathbf{v}$ 的係數積, 如此方可保證係數積的封閉性. 所以我們考慮集合 $\{r\mathbf{v} \mid r \in \mathbb{F}\}$. 這個集合不只對 $\mathbb{F}$ 的係數積有封閉性, 而且有加法的封閉性, 事實上它就是包含 $\mathbf{v}$ 最小的 subspace 了. 我們用 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 來表示它, 意即 $\mathbf{v}$ 所 *span* (展成) 的向量空間. 我們來驗證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 確為 V 的 subspace. 首先由於 $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$, 所以的確有 $\mathbf{0} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v})$. 接著, 若 $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathrm{Span}(V)$, 表示存在 $s, t \in \mathbb{F}$ 滿足 $\mathbf{u} = s\mathbf{v}$ 且 $\mathbf{w} = t\mathbf{v}$, 因此對任意 $r \in \mathbb{F}$, 我們有 $\mathbf{u} + r\mathbf{w} = (s\mathbf{v}) + r(t\mathbf{v}) = (s + rt)\mathbf{v}$. 由於 $s + rt \in \mathbb{F}$, 我們有 $(s + rt)\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v})$, 亦即 $\mathbf{u} + r\mathbf{w} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v})$. 得證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 為 V 的 subspace.

現若 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, 既然 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}), \mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 為 V 的 subspace, 由上一節 subspace 的 sum 的概念, 我們知 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}) + \mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 亦為 V 的 subspace. 依定義

$$\mathrm{Span}(\mathbf{u}) + \mathrm{Span}(\mathbf{v}) = \{r\mathbf{u} + s\mathbf{v} \mid r, s \in \mathbb{F}\}.$$

由於它是包含 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 最小的 subspace, 我們視之為由 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 所展成的 subspace, 故一般用 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 來表示. 而 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 中的元素, $r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ 就稱之為 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的 *linear combination* (線性組合). 這個概念可以推廣到一般有限多個向量的情況, 我們有以下的定義.

Definition 3.4.1. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$, 且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. 對於任意 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, 我們稱 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ 為 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的 *linear combination*. 所有 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的 linear combination 所成的集合, 我們用 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 來表示, 亦即

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \{\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{v}_i \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}\}.$$

我們可以直接驗證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 會是 V 的 subspace (或是利用 sum 的概念, 參見 Question 3.7). 事實上它是包含 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 最小的 subspace. 這是因為若 W 是 V 的 subspace 且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in W$, 則由 W 的加法與係數積的封閉性得 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \subseteq W$.

其實我們不只談論有限多個 V 中的向量所展成的 subspace, 我們也可談論 V 中任意的非空子集合所展成的 subspace. 不過這裡要注意的是, 我們每次只能處理有限多個向量的加法, 所以線性組合也僅能是有限多個向量的線性組合. 因此當 V 中的子集合 S 有無窮多個元素時, S 的 span 是由 S 中有限多個向量的線性組合所組成的. 我們有以下的定義.

Definition 3.4.2. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 S 是 V 的非空子集. 則定義

$$\mathrm{Span}(S) = \{\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{v}_i \mid n \in \mathbb{N}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}\}.$$

要提醒大家注意, 在 Definition 3.4.1 中 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 的定義, 由於涉及 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 這 n 個給定的向量, 所以在此我們用集合表示法說明 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ 的元素時不必提及 n 和 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是什麼. 然而在 Definition 3.4.2 中當我們用集合表示法說明 $\mathrm{Span}(S)$ 的元素時, 我

們是在 S 中任選 n 個元素 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, 這 n 和 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是變動的, 所以必須寫下表示 n 是任意可能的正整數, 而 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 S 中任意可能的向量.

事實上 $\mathrm{Span}(S)$ 也會是 V 的 subspace. 首先 S 不是空集合, 所以存在 $\mathbf{v}\in S$, 此時考慮 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 由 $\mathrm{Span}(S)$ 的定義 (取 $n=1$, $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}$, $c_1=0$), 知 $\mathbf{0}\in\mathrm{Span}(S)$. 現若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(S)$ 且 $r\in\mathbb{F}$, 則由於 $\mathbf{u}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_n\mathbf{u}_n$, 其中 $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n\in S$ 且 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{v}=c'_1\mathbf{v}_1+\cdots+c'_m\mathbf{v}_m$, 其中 $m\in\mathbb{N}$, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_m\in S$ 且 $c'_1,\ldots,c'_m\in\mathbb{F}$, 我們有

$$\mathbf{u}+r\mathbf{v}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_n\mathbf{u}_n+rc'_1\mathbf{v}_1+\cdots+rc'_m\mathbf{v}_m,$$

仍符合 $\mathrm{Span}(S)$ 中元素之定義, 故知 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(S)$ 得證 $\mathrm{Span}(S)$ 為 V 的 subspace.

在我們寫下一些向量的線性組合時, 前面乘的係數若是 0, 通常我們的省略不寫. 例如 $2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2+0\mathbf{v}_3$ 是 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的一個線性組合, 不過我們通常寫成 $2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2$. 基於這個原因再加上我們希望任何集合的 span 皆為 vector space, 因此當 S 是空集合 (用 $\emptyset$ 表示), 我們定義 $\mathrm{Span}(S)=\mathrm{Span}(\emptyset)=\{\mathbf{0}\}$ 這一個 zero subspace.

給定一個 vector space V, 若能找到一個 subset S 使得 $\mathrm{Span}(S)=V$, 這當然很好, 表示我們可以用較小的集合 S 就能描述 V. 特別的, 若 S 是有限個元素的集合那就更好, 表示僅需有限多個元素就能 "掌握" V 中所有的元素.

Definition 3.4.3. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $S\subseteq V$. 若 $\mathrm{Span}(S)=V$, 則稱 S 為 V 的一組 *spanning set*. 此時我們說 S generates (或 spans V). 特別的, 若能找到 finite set (即僅有有限個元素的集合) S 滿足 $\mathrm{Span}(S)=V$, 此時我們稱 V 為 *finitely generated vector space.*

為何特別稱之為 finitely generated vector space 呢? 這表示此 vector space 中所有的元素都可表示成固定有限多個元素的線性組合. 一般的 vector space, 有可能不是 finitely generated, 所以要區分出來, 我們看以下的例子.

Example 3.4.4. 我們討論前面提的一些 vector space 哪些是 finitely generated vector space.

(A) $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是 finitely generated. 因為考慮 $E_{ij}\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 表示 (i,j)-th entry 為 1, 其他 entry 為 0 的 $m\times n$ matrix. 很容易看出所有的 $m\times n$ matrix 皆可寫成 E_{ij} 其中 $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$ 的 linear combination. 所以 $\{E_{ij}\mid 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n\}$ 是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 spanning set, 也因此 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是 finitely generated vector space.

(B) $P(\mathbb{F})$ 不是 finitely generated vector space. 這是因為如果 $\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}$ 為 $P(\mathbb{F})$ 的 spanning set, 假設 $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ 的最高次為 m, 則任何 $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ 的 linear combination $c_1f_1(x)+\cdots+c_nf_n(x)$ 的次數皆不可能大於 m. 也就是說 $\mathrm{Span}(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ 不可能包含次數大於 m 的多項式. 此與 $\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}$ 為 $P(\mathbb{F})$ 的 spanning set 明顯不合, 故知 $P(\mathbb{R})$ 不可能是 finitely generated. 不過次數小於等於 n 的多項式所成的集合 $P_n(\mathbb{F})$ 就是 finitely generated vector space. 很容易看出 $\{x^n,\ldots,x,1\}$ 就是 $P_n(\mathbb{F})$ 的 spanning set.

大家或許直覺會認為 finite generated vector space 的 subspace 一定也是 finitely generated. 這是對的, 不過證明卻不是如直覺那麼簡單 (大家不妨現在試著證明看看). 它的證明等到介紹完 linearly independence 的概念, 我們就可以處理.

談到 $\mathrm{Span}(S)$, 我們自然會需要探討那些元素會是 $\mathrm{Span}(S)$ 的元素. 我們看以下的例子.

Example 3.4.5. 在 $P_3(\mathbb{R})$ 中考慮 $\mathbf{u} = x^3 - 2x^2 - 5x - 3$ and $\mathbf{v} = 3x^3 - 5x^2 - 4x - 9$. 我們要檢查 $2x^3 - 2x^2 + 12x - 6$ 和 $3x^3 - 2x^2 + 7x + 8$ 是否屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. 首先檢查是否存在 $a, b \in \mathbb{R}$ 使得 $2x^3 - 2x^2 + 12x - 6 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = a(x^3 - 2x^2 - 5x - 3) + b(3x^3 - 5x^2 - 4x - 9)$ 比較係數後我們發現 a, b 需滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a + 3b &= 2 \\ -2a - 5b &= -2 \\ -5a - 4b &= 12 \\ -3a - 9b &= -6 \end{cases}$$

利用上一章解聯立方程組的方法, 我們解得 $a = -4, b = 2$, 因此得到 $2x^3 - 2x^2 + 12x - 6 \in \mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. 同樣的我們要檢查是否存在 $a, b \in \mathbb{R}$ 使得 $3x^3 - 2x^2 + 7x + 8 = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = a(x^3 - 2x^2 - 5x - 3) + b(3x^3 - 5x^2 - 4x - 9)$ 比較係數後我們發現 a, b 需滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a + 3b &= 3 \\ -2a - 5b &= -2 \\ -5a - 4b &= 7 \\ -3a - 9b &= 8 \end{cases}$$

結果發現此聯立方程組無解, 因此知 $3x^3 - 2x^2 + 7x + 8 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

我們可以討論更一般的情形, 即探討何時 $f(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ 會屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. 依定義, 這表示存在 $a, b \in \mathbb{R}$ 使得 $c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4 = a(x^3 - 2x^2 - 5x - 3) + b(3x^3 - 5x^2 - 4x - 9)$ 比較係數後我們發現 a, b 需滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a + 3b &= c_1 \\ -2a - 5b &= c_2 \\ -5a - 4b &= c_3 \\ -3a - 9b &= c_4 \end{cases}$$

利用 elementary row operation 我們將 augmented matrix

$$\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 3 & c_1 \\ -2 & -5 & c_2 \\ -5 & -4 & c_3 \\ -3 & -9 & c_4 \end{array}\right].$$

轉換得 reduced echelon form

$$\left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & -5c_1 - 3c_2 \\ 0 & 1 & 2c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & -17c_1 - 11c_2 + c_3 \\ 0 & 0 & 3c_1 + c_4 \end{array}\right].$$

這告訴我們此聯立方程組有解若且唯若 $-17c_1 - 11c_2 + c_3 = 0$ 且 $3c_1 + c_4 = 0$ 且有解時其解為 $a = -5c_1 - 3c_2, b = 2c_1 + c_2$. 也就是說當 $-17c_1 - 11c_2 + c_3 = 0$ 且 $3c_1 + c_4 = 0$ 時, 多項式 $f(x) = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$ 會屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 且此時 $f(x) = (-5c_1 - 3c_2)\mathbf{u} + (2c_1 + c_2)\mathbf{v}$.

在這一節最後, 我們列下一些有關 $\mathrm{Span}(S)$ 的性質.

Lemma 3.4.6. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $S \subseteq V$, 則 $\mathrm{Span}(S)$ 是 V 中包含 S 最小的 *subspace*. 換句話說, 若 W 是 V 的 *subspace* 且 $S \subseteq W$, 則 $\mathrm{Span}(S) \subseteq W$.

Proof. 依定義 $S \subseteq \mathrm{Span}(S)$ 且我們已知 $\mathrm{Span}(S)$ 是 V 的 subspace. 現假設 W 是 V 的 subspace 且 $S \subseteq W$, 我們要說明 $\mathrm{Span}(S) \subseteq W$. 對任意 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S)$, 我們知存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in S$ 以及 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i$. 現因 $S \subseteq W$, 我們有 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in W$, 故由 W 是 subspace, 得證 $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i \in W$. $\square$

利用 Lemma 3.4.6, 我們馬上可知若 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$. 這當然可直接用定義來證明, 不過利用 Lemma 3.4.6, 我們就可以直接套用, 而省去許多繁瑣的論證. 這是因為 $\mathrm{Span}(S_2)$ 是 V 的 subspace 又 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$, 故套用 Lemma 3.4.6 (考慮 $S = S_1$, $W = \mathrm{Span}(S_2)$ 的情形) 得證 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$. 利用這個概念我們也可以很快的處理 Span 對兩集合交集及聯集的影響.

當 S_1, S_2 是 V 的 subsets, 我們可以考慮 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2)$ 和 $\mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$ 的關係. 由於 $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$, 我們有 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1)$. 同理 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$. 由於 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2)$ 同時包含於 $\mathrm{Span}(S_1)$ 和 $\mathrm{Span}(S_2)$ 可推得 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$. 不過反向 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \supseteq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$ 就不一定成立, 主要原因是取集合的交集遠比 Span 後再取交集小的多. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 上考慮 $S_1 = \{(1,1)\}$, $S_2 = \{(2,2)\}$. 我們有 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 所以 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) = \mathrm{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$; 不過 $\mathrm{Span}(S_1) = \{(r,r) \mid r \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}(S_2)$, 所以 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) = \{\mathbf{0}\} \subsetneq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$.

接下來我們看聯集的情況. 因為 $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$ 且 $S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$, 我們有 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 以及 $\mathrm{Span}(S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$, 所以當然 $\mathrm{Span}(S_1) \cup \mathrm{Span}(S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$. 不過 $\mathrm{Span}(S_1) \cup \mathrm{Span}(S_2)$ 比起 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 太小了, 事實上我們知道 $\mathrm{Span}(S_1) \cup \mathrm{Span}(S_2)$ 在大多數的情況甚至不是 subspace (Proposition 3.3.6). 不過 Proposition 3.3.8 告訴我們 $\mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$ 是包含 $\mathrm{Span}(S_1)$ 和 $\mathrm{Span}(S_2)$ 最小的 subspace, 因此由 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 包含 $\mathrm{Span}(S_1)$ 和 $\mathrm{Span}(S_2)$ 且是 subspace 得 $\mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$. 另一方面 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 是包含 $S_1 \cup S_2$ 最小的 subspace, 然而 $S_1 \subseteq \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$ 且 $S_2 \subseteq \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$, 再加上 $\mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$ 是 subspace, 所以我們也有 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$. 因此證得 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$. 我們總結以上的結果如下.

Proposition 3.4.7. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 S_1, S_2 皆為 V 的 *subsets.*

(1) 若 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$.

(2) $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$.

(3) $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$.

3.5. Linearly Dependence and Independence

Spanning set 的概念是處理 linear combination 的存在性, 也就是了解一個向量可不可以寫成一些特定向量的線性組合; 而 linear independence 的概念便是處理 linear combination 的唯一性, 也就是說寫成線性組合的方法是否唯一. 這一節中便是探討 linearly independent 的概念.

考慮 over $\mathbb{F}$ 的 vector space V. 若 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3 \in V$, 我們知道 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ 為 V 中包含 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 以及 $\mathbf{v}_3$ 最小的 subspace. 這個 subspace 很容易掌握, 因為每個元素都是 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的線性組合, 我們只要了解 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 就可以瞭解這個 subspace. 當然了, 若能用較少的元素就能掌握整個 subspace 就更好, 所以我們自然會問這裡 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 有沒有多餘, 不必要的呢? 這是有可能的, 例如若 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$, 則 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$. 所以此時僅要了解 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 就夠了. 當 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 表示存在 $r_1,r_2 \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}_3 = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2$, 此時表示 $\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$, 是有關係的, 我們稱 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 是 *linearly dependent* (線性相依或線性相關). 不過要注意 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 並不表示 $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$. 我們看以下的例子.

Example 3.5.1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中考慮 $\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (2,2)$. 我們有 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$, 因為 $\mathbf{v}_3 = (2,2) = 0(1,0) + 2(1,1) = 0\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$. 不過 $\mathbf{v}_1 \not\in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, 因為 $(1,0)$ 無法寫成 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 的線性組合.

因此當我們要檢查 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 之間是否有線性關係, 不能只檢查是否 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 還要檢查是否 $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ 以及 $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)$. 不過分開檢查這三種情況有點麻煩. 我們再深入看一下這三種情況代表甚麼. 當 $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, 表示存在 $r,s \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}_1 = r\mathbf{v}_2 + s\mathbf{v}_3$, 也就是說 $1\mathbf{v}_1 + (-r)\mathbf{v}_2 + (-s)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. 同理, $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)$ 和 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 分別表示存在 $r',s' \in \mathbb{F}$ 和 $r'',s'' \in \mathbb{F}$ 分別使得 $\mathbf{v}_2 = r'\mathbf{v}_1 + s'\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{v}_3 = r''\mathbf{v}_1 + s''\mathbf{v}_2$. 也就是說當 (1) $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, (2) $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)$ 或 (3) $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 其中有一個發生時, 我們會有相對應的

$$\begin{array}{rcrcrcll}
1\mathbf{v}_1 & + & (-r)\mathbf{v}_2 & + & (-s)\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{0} & \qquad (1)\\
(-r')\mathbf{v}_1 & + & 1\mathbf{v}_2 & + & (-s')\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{0} & \qquad (2)\\
(-r'')\mathbf{v}_1 & + & (-s'')\mathbf{v}_2 & + & 1\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{0} & \qquad (3)
\end{array}$$

這三種可能的情況發生, 其中 $r,s,r',s',r'',s'' \in \mathbb{F}$. 不過不管 (1), (2), (3) 哪一種情況發生, 總有一個 $\mathbf{v}_i$ 其前面的係數是 1, 不為 0. 也就是說我們可找到不全為 0 的 c_1,c_2,c_3 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. 反之若能找到 c_1,c_2,c_3 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, 我們就可將前面係數 c_i 不等於 0 的 $\mathbf{v}_i$ 寫成另兩個向量的線性組合. 例如若 $c_1 \neq 0$, 則可得 $\mathbf{v}_1 = (-c_1'c_2)\mathbf{v}_2 + (-c_1'c_3)\mathbf{v}_3$, 其中 c_1' 為 c_1 的乘法反元素 (因 $c_1 \neq 0$). 由此可知, 存在 c_1,c_2,c_3 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ 和前面所提 (1), (2), (3) 三種情況是等價的, 因此我們用此方法來定義 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly dependent.

讓我們把以上概念推廣到任意多個向量的情況. 我們稱一組向量為 linearly dependent, 指的是這一組向量之間有關係, 也就是說其中有一個向量是其他向量的線性組合. 例如假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 就表示其中有一個 $\mathbf{v}_i$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合. 每次要提有一個 $\mathbf{v}_i$ 是其他向量的線性組合有點麻煩. 不過若我們更進一步觀察, 此

時 $\mathbf{v}_i = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + r_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} + \cdots + r_n\mathbf{v}_n$, 其中這些 r_j 皆為實數. 所以我們得

$$r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + (-1)\mathbf{v}_i + r_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

也就是說我們找到一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. 反之, 若存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. 我們假設 $c_i \neq 0$, 此時令 c_i' 為 c_i 的乘法反元素 (即 $c_ic_i' = 1$), 可得

$$\mathbf{v}_i = (-c_1c_i')\mathbf{v}_1 + \cdots + (-c_{i-1}c_i')\mathbf{v}_{i-1} + (-c_{i+1}c_i')\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + (-c_nc_i')\mathbf{v}_n,$$

也就是說 $\mathbf{v}_i$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合. 由此可知, 存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ 就等同於 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 這一組向量之間有關係. 由於這個方式來表達線性相關不必敘述其中哪一個向量是其他向量的線性組合, 較為簡潔. 一般就以這個方式來定義線性相關.

Definition 3.5.2. 假設 V 是一個 vector space over $\mathbb{F}$, 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$, 若存在一組不全為 0 的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

則稱 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent* (線性相依或線性相關). 反之, 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 不是 linearly dependent, 則稱為 *linearly independent* (線性獨立).

這個定義可以推廣到 V 的任意子集合. 若 $S \subseteq V$, 且 S 中存在相異 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in S$ 使得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 則稱集合 S 為 linearly dependent; 反之, 若 S 不是 linearly dependent, 表示任意的一組相異向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in S$ 皆為 linearly independent, 則稱 S 為 linearly independent. 在此定義之下空集合 $\emptyset$ 是 linearly independent, 因為我們無法在 $\emptyset$ 中找到任何 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 linearly dependent. 另一方面, 若 $\mathbf{0} \in S$, 則 S 一定是 linearly dependent. 因為 $\mathbf{0}$ 本身一個元素就是 linearly dependent. 原因是 $1\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 所以我們找到一個係數不為 0 的 $\mathbf{0}$ 的線性組合. 因此依定義 S 為 linearly dependent.

一般來說, 除了上述 $S = \emptyset$ 和 $\mathbf{0} \in S$ 這兩種情況外, 要說明 S 是否為 linearly independent 並不是馬上能看出來的. 通常當我們要證明一組向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 我們有以下兩個方法: 第一個方法就是先設 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, 再證明此時 $c_1,\ldots,c_n$ 必全為 0. 第二種方法, 就是所謂的反證法, 亦即先假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent (也就是說假設存在不全為 0 的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$), 再推得矛盾. 第一個方法通常在有具體的向量時使用, 而處理抽象的情形大多使用第二種方法, 如下面的例子.

Example 3.5.3. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$ 為 linearly independent. 這表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 之間沒有線性關係. 因此可以理解若我們在 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 中移除 $\mathbf{v}_n$, 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}$ 這一組向量應仍為 linearly independent. 要證明這一個事實, 若我們用第一個方法, 很難由 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}$ 推得 $c_1,\ldots,c_{n-1}$ 必全為 0. 然而若利用第二個方法, 即假設存在不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_{n-1}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}$. 此時令 $c_n = 0$, 我們得到一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + c_n\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}.$$

此與 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ 為 linearly independent 的假設相矛盾, 故得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}$ 為 linearly independent. 大家應可以看出, 我們其實是證明了當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ 為 linearly dependent 時, 加入任意的 $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ 後, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{v}_n$ 也是 linearly dependent.

Question 3.8. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $S \subseteq S' \subseteq V$. 試說明以下的對錯.

(1) 若 S 為 *linearly independent,* 則 S' 為 *linearly independent.*

(2) 若 S 為 *linearly dependent,* 則 S' 為 *linearly dependent.*

(3) 若 S' 為 *linearly independent,* 則 S 為 *linearly independent.*

(4) 若 S' 為 *linearly dependent,* 則 S 為 *linearly dependent.*

在 Example 3.5.3 中, 我們知道當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$ 這一組向量為 linearly independent 時, 在這一組向量中移除一些向量, 仍不會改變其 linearly independent 的性質. 但若加入新的向量情況可能改變. 下一個定理就是告訴我們何時加入新的向量仍會保持 linearly independent.

Lemma 3.5.4. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1} \in V$. 若已知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent,* 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 *linearly independent* 若且唯若 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$.

Proof. 如果 $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 之間有線性關係, 即為 linearly dependent. 故知若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent, 不可能會有 $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 的情形發生. 得證 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$.

反之, 假設 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 我們要證明 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent. 利用反證法, 即設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly dependent, 也就是說存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n,c_{n+1}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=\mathbf{0}$. 我們知此時 c_{n+1} 必為 0, 否則由 $c_{n+1}\neq 0$ 知存在 $c'_{n+1} \in \mathbb{F}$ 使得 $c_{n+1}c'_{n+1}=1$ 此時

$$\mathbf{v}_{n+1}=(-c_1c'_{n+1})\mathbf{v}_1+\cdots+(-c_nc'_{n+1})\mathbf{v}_n,$$

會得到 $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 之矛盾. 因此由 $c_{n+1}=0$, 得 $c_1,\ldots,c_n$ 不全為 0 且使得

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0},$$

亦即 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent. 這和已知的假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent 相矛盾, 故得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent. □