1.2. 解聯立方程組

大家應很容易看出一個 augmented matrix 經過上節所提的 elementary row operation 後所得的 augmented matrix 所對應的聯立方程組就是大家熟悉的加減消去法的三種步驟所得的方程組. 利用加減消去法最常遇到的問題就是 (尤其在處理未知數很多的方程組時), 常常做了幾次後, 混亂到不知道那些式子是消過了以及那些式子還可以再進一步消減. 還有就是, 到底要將方程組的式子消到哪種地步時, 才可以解出方程組. 關於第一個問題, 我們可以理解用矩陣的表示法就可以把這消去的過程記錄下來. 而接下來我們要探討的就是第二個問題, 也就是將矩陣化成某種特定的形式就可以解出方程式來.

我們的目的就是要將 augmented matrix $[A \mid \mathbf{b}]$ 中的係數矩陣 A 利用這三種 elementary row operation 化成所謂的 *echelon form*.

我們先解釋一下何謂 echelon form. 首先我們將矩陣每一個 row 從左到右來看第一個不為 0 的項稱為這個 row 的 *leading entry*. 因為係數矩陣中的每一個 entry 對應到聯立方程組中某個 variable (未知數) 的係數, 所以 leading entry 若是 variable x_i 的係數, 我們就說這個 leading entry 發生在 x_i 的位置. 要注意, 這也等同於這個 leading entry 是位於從左到右算來第 i 個 column. 例如矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

第一個 row 的 leading entry 為 1 不過因為第一個 row 還有其他位置也是 1, 所以我們特別要說明第一個 row 的 leading entry 發生在 x_1 的位置, 而第二個 row 和第三個 row 的 leading entry 分別為 5 和 1 且發生的位置皆在 x_3.

所謂一個矩陣是 echelon form 表示這個矩陣沒有 leading entry 的 row (即該 row 每一項皆為 0) 必需在最下方, 而有 leading entry 的 row 其 leading entry 所在位置從上到下來看是往右移的. 換言之, 若上一個 row 的 leading entry 所在的位置是 x_i, 而下一個 row 的 lading entry 所在的位置是 x_j, 則必需 $i < j$. 例如上一個矩陣並非 echelon form, 因為第 3 個 row 和第 2 個 row 的 leading entry 的位置皆為 x_3, 並未右移. 另外矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

都不是 echelon form, 因為前一個矩陣全為 0 的 row 並未置於最下方, 而後一個矩陣第 3 個 row 的 leading entry 在第 2 個 row 的 leading entry 的左方. 至於矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

就是 echelon form. 當一個矩陣是 echelon form 時, 我們稱每一個 row 的 leading entry 為 *pivot*, 而 pivot 所在的位置我們稱為 *pivot variable*.

我們要強調, 絕不會有 pivot 的個數多於方程組 variables (未知數) 的個數的情形發生. 這是因為當係數矩陣 A 是 echelon form 時, 每一個 column 最多僅能有一個 pivot (因為不能有兩個 leading term 在同一個位置), 所以 pivot 的個數不能多於 column 的個數. 而 A 的 column 個數表示的就是此聯立方程組 variables 的個數, 因此 pivot 的個數不會多於 variables 的個數. 另一方面依定義每一個 row 最多僅能有一個 pivot, 所以 pivot 的個數也不會多於該方程組的方程式個數 (即係數矩陣 row 的個數).

很容易就可以發現一個矩陣利用 elementary row operations 化成的 echelon form 的方法有很多種，而所化成的 echelon form 也有可能不同 (例如一個 echelon form 的某一個 row 經由 type 2 的 elementary row operation 作用後仍為 echelon form)。不過以後我們會證明，同一個矩陣不管用哪些 elementary row operations 化成的 echelon form 它們的 pivot variables 皆會相同。也因此一個矩陣化為 echelon form 其 pivot 的個數是固定的, 我們特別有以下的定義.

Definition 1.2.1. 假設 A 為一矩陣. 若 A 利用 elementary row operations 化為 echelon form 後其 pivot 的個數為 r, 我們稱 r 為 A 的 *rank*. 用 $\mathrm{rank}(A)=r$ 來表示.

一個矩陣的 rank 是該矩陣很重要的資訊，以後我們會探討它很多的性質。由於它的重要性，我們特別在這裡先介紹它的定義，讓大家先熟悉一下。

Question 1.3. 假設矩陣 A 有 m 個 *row* 以及 n 個 *column.* 若 $\mathrm{rank}(A)=r$, 試說明 $r\leq\min\{m,n\}$.

當我們將 augmented matrix $[A\mid\mathbf{b}]$ 利用 elementary row operation 將之化成 $[A'\mid\mathbf{b}']$ 且 A' 為 echelon form 後. A' 有兩種情形. 一種情形為 A' 每一個 row 皆不全為 0; 另一種為 A' 有些 row 全為 0. 我們分別依這兩種情形來討論聯立方程組的解.

(1) A' 每一個 row 皆不全為 0: 此時聯立方程組為 *consistent*, 即一定有解. 我們又可細分成兩種情況.
   (a) 第一種情況是每一個變數 (variable) x_i 皆為 pivot variable. 亦即 pivot 的個數等於方程組未知數的個數 (即係數矩陣 A 的 column 個數). 例如

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

   此時 echelon form 的 pivot variable 分別為 x_1,x_2,x_3 恰就是聯立方程組的未知數 x_1,x_2,x_3. 在這種情況之下此聯立方程組會有唯一解, 而且我們可利用從下往上“代回”的方式求得解. 例如前面的 augmented matrix 所對應的聯立方程組為

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 4 \\ & 3x_2 & +x_3 & = & 2 \\ & & -x_3 & = & 1 \end{array}$$

所以我們從最下面的 $-x_3=1$ 可得 $x_3=-1$. 再將 $x_3=-1$ 代入其上一式 $3x_2+x_3=2$, 得 $3x_2-1=2$, 即 $x_2=1$. 最後將 $x_3=-1,x_2=1$ 代入 $2x_1+x_2+x_3=4$, 得 $x_1=2$. 故得其解為 $x_1=2,x_2=1,x_3=-1$.

(b) 第二種情況是有些 variable x_i 不是 pivot variable. 也就是方程組未知數的個數多於 pivot 的個數. 例如

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

此時 echelon form 的 pivot variable 分別為 x_1,x_2,x_4 少於立方程組的未知數 x_1,x_2,x_3,x_4. 在此情形之下此聯立方程組會有無窮多解. 要得到這種方程組所有的解, 首先我們要找到 *free variables*. 所謂 free variable 指的是方程組不是 pivot variable 的 variable. 例如前面這個例子, x_3 就是 free variable. Free variable 意指它可以任意取值, 所以找到 free variables 後你可以給它們任意的參數, 然後再利用如上一情況中由下往上代回的方式找到聯立方程組所有的解. 例如上一個 augmented matrix 所對應的聯立方程組為

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & 3x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 2 \\ & & & -x_4 & = & 1 \end{array}$$

首先令 free variable x_3 為一參數 t (表示它可以是任意實數 $t\in\mathbb{R}$). 接著我們從最下面的 $-x_4=1$ 可得 $x_4=-1$. 再將 $x_3=t,x_4=-1$ 代入其上一式 $3x_2+3x_3+x_4=2$, 得 $3x_2+3t-1=2$, 即 $x_2=1-t$. 最後將 $x_2=1-t,x_3=t,x_4=-1$ 代入 $2x_1+x_2+3x_3+x_4=4$, 得 $x_1=2-t$. 故得其解為 $x_1=2-t,x_2=1-t,x_3=t,x_4=-1$, 其中 t 為任意實數. 因為 t 可以是任意實數, 由此我們也知此方程組有無窮多解.

(2) A' 有些 row 全為 0: 此時聯立方程組可能無解, 我們分成兩種情況:

(a) A' 有一個 row 全為 0 但 $\mathbf{b}'$ 在該 row 不為 0. 例如

$$[A'\mid\mathbf{b}']=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A' 最後一個 row 皆為 0, 但 $\mathbf{b}'$ 在該 row 的位置為 1. 在此情形之下聯立方程組為 *inconsistent*, 即無解. 例如上一個 augmented matrix 其最後一個 row 所對應的方程式為

$$0x_1+0x_2+0x_3=1$$

但不管 x_1,x_2,x_3 代任何的實數都無法滿足 $0x_1+0x_2+0x_3=1$, 所以此方程組無解.

(b) A' 全為 0 的 row, $\mathbf{b}'$ 在該 row 亦為 0. 例如

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

這兩個 augmented matrices 皆為這種情形. 在此情形之下聯立方程組一定是 consistent. 事實上在此情形我們可以忽略全為 0 的 row, 例如前兩個 augmented matrices 所對應的方程組和

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

所對應的方程組一樣. 所以我們可依前面 (1) A' 每一個 row 皆不全為 0 的情況找出聯立方程組所有的解.

Question 1.4. 考慮一個由 n 個 *variables* 的 m 個方程式所組成的聯立方程組. 試說明前面討論 (1)(a) 的情形只有在 $m = n$ 的時候才有可能發生*;* 而 (1)(b) 的情形只有在 $m < n$ 的情形才有可能發生*;*

Question 1.5. 說明一個由 n 個 *variables* 的 m 個方程式所組成的聯立方程組，當係數矩陣的 *rank* 等於 m，此聯立方程組一定有解 *(*即為 *consistent).* 而當係數矩陣的 *rank* 等於 n 時，此聯立方程組若有解則解唯一。

我們總結, 當 A 是 echelon form 時, 找出 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 所有的解的方法. 首先, 當 A 有一個 row 全為 0 但 $\mathbf{b}$ 在該 row 不為 0 時, 我們知該方程組無解, 所以我們僅需討論其他的情況 (即有解的情況). 此時我們先挑出 free variable (即非 pivot variable). 由於 free variable 可以任意取值, 一般來說我們會用一些參數表示之 (注意不同的 free variable 要用不同的參數代號). 接著, 我們由下而上, 從最大編號的 pivot variable 開始, 利用 free variables 的那些參數將它的值寫下來, 再依序寫出所有 pivot variables 的值.

我們看以下幾個解聯立方程組的例子.

Example 1.2.2. Solve the linear system

$$\begin{array}{rrrcl} & x_2 & -3x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & +3x_2 & -1x_3 & = & 7 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 10. \end{array}$$

此聯立方程組的 augmented matrix 為

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right].$$

由於第二, 三 row 的 leading entry 在最左端. 但第二 row 的 leading entry 的值較小, 為了計算方便, 我們將之置於第一個 row, 即將一, 二 row 交換得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right].$$

接下來由於第三 row 的 leading entry 也在 x_1 的位置需要消去, 所以將第一 row 乘上 -2 加到第三 row 得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right].$$

此時係數矩陣仍不是 echelon form, 需將第三 row 的 x_2 位置的 entry 消去. 故將第二 row 加至第三 row 得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right].$$

這是 echelon form. 由於係數矩陣沒有全為 0 的 row, 我們知此 linear system 為 consistent. 而又 pivot 的個數等於 variable 的個數, 故知此 linear system 的解唯一. 事實上, 最下面第三 row 表示 $-3x_3=-9$, 得 $x_3=3$. 代入第二 row 表示的 $x_2-3x_3=-5$, 得 $x_2=4$. 最後代入第一 row 表示的 $2x_1+3x_2-x_3=7$, 得 $x_1=-1$. 故知此 linear system 的解為 $(x_1,x_2,x_3)=(-1,4,3)$.

Example 1.2.3. Solve the linear system

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -1x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & -1x_3 & -3x_4 & = & 7. \end{array}$$

此聯立方程組的 augmented matrix 為

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & 7 \end{array}\right].$$

第二, 三 row 的 leading entry 需被消去. 故將第一 row 分別乘上 $-2,-1$ 加到第二, 三 row 得

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & 5 \end{array}\right].$$

接下來由於第三 row 的 leading entry 需要消去, 所以將第二 row 乘上 -1 加到第三 row 得

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right].$$

這是 echelon form. 由於第三 row 表示 $0x_1+0x_2+0x_3=8$, 知此 linear system 為 inconsistent.

Example 1.2.4. Solve the linear system

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -2x_2 & +1x_3 & -1x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & -5x_2 & +5x_3 & -4x_4 & = & 3 \\ -x_1 & +1x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = & 5. \end{array}$$

此聯立方程組的 augmented matrix 為

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 5 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

第二, 三, 四 row 的 leading entry 需被消去. 故將第一 row 分別乘上 $-2,-3,1$ 加到第二, 三, 四 row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 9 \end{array}\right].$$

接下來第三, 四 row 的 leading entry 需要消去, 所以將第二 row 分別乘上 $-1,1$ 加到第三, 四 row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

這是 echelon form. 由於係數矩陣全為 0 的第三, 四 row 全為 0, 知此 linear system 為 consistent.

事實上此 linear system 的 pivot variables 為 x_1,x_2, 而 free variables 為 x_3,x_4. 我們可以令 $x_4=r$, $x_3=s$, 代入第二 row 表示的 $x_2+2x_3-x_4=-9$, 得 $x_2=-9+r-2s$. 再代入第一 row 表示的 $x_1-2x_2+x_3-x_4=4$, 得 $x_1=-14+3r-5s$. 故知此 linear system 的解為

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-14+3r-5s,-9+r-2s,s,r), r,s\in\mathbb{R}.$$

通常我們習慣寫成 column vector 且將 r,s 提出. 故將解寫成

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r,s\in\mathbb{R}.$$

了解到解聯立方程組的方法及步驟後, 有幾件事必須要說明: (1) 為何經由 elementary row operations 我們可以將一個矩陣化為 echelon form? (2) 為何利用這個 echelon form, 便可得到與原方程組相同的解集合? (3) 為什麼用前面介紹 (pivot variables, free variables) 的方法就可以把係數矩陣是 echelon form 的聯立方程組所有的解找出來? 在下一節, 我們將詳細介紹有關 echelon form 的特性, 然後一一回答這些問題. 不過再次提醒大家務必先熟悉這節介紹解聯立方程組的方法及步驟.