2.4.2. 解的唯一性. 所謂聯立方程組解的唯一性, 指的是假設聯立方程組有解時, 探討其解是否唯一. 所以唯一性並不涉及解是否存在的問題.

給定 $A \in M_{m\times n}$ 以及 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. 如果 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 則 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解和 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解 (這裡 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的零向量) 息息相關, 我們有以下之定理.

Lemma 2.4.4. 給定 $A \in M_{m\times n}$ 以及 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 且假設 $\mathbf{x} = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ 是聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解. 則

(1) 若 $\mathbf{x} = \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^n$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解, 則 $\mathbf{x} = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$ 為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解.

(2) 若 $\mathbf{x} = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解, 則 $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解.

Proof. (1) 假設 $\mathbf{x} = \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^n$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解, 意即 $A\mathbf{c}' = \mathbf{b}$. 由已知 $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ 得

$$A(\mathbf{c}' - \mathbf{c}) = A\mathbf{c}' - A\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

因此 $\mathbf{x} = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$ 會是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解.

(2) 若 $\mathbf{x} = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解, 則

$$A(\mathbf{c} + \mathbf{u}) = A\mathbf{c} + A\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

得證 $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解. □

Lemma 2.4.4 告訴我們若已知 $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ 為 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解, 且知道 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 所有的解, 就能利用 $\mathbf{c}$ 以及 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 所有的解得到 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 所有的解. 所以了解 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 所有的解是很重要的課題 (以後我們會深入探討). 回顧一下 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 這樣的 linear system, 我們稱之為 homogeneous linear system. Homogeneous linear system 一定有解, 事實上當 $A \in M_{m\times n}$ 時, $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ 就是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解. 這組解 $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ 因為不需任何計算就能得到, 我們稱之為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的 trivial solution. 注意 trivial solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 這裡的 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的零向量, 而 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 這裡的 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的零向量, 所以雖然我們用同樣的符號表示, 但當 $n \neq m$ 時它們是不同的, 大家需區分清楚. 當一個 homogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 除了 trivial solution 外還有其他的 solution (即解不唯一), 我們稱這些不為 $\mathbf{0}$ 的 solution 為 nontrivial solution.

從 Lemma 2.4.4 我們知, 若 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 沒有 nontrivial solution (即解唯一), 則對於 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 若 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 其解必唯一. 由這觀點, 我們可以得到以下關於聯立方程組解的唯一性的重要定理.

Theorem 2.4.5. 假設 $A \in M_{m\times n}$. 以下各敘述是等價的.

(1) 若 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 且聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 則解唯一.

(2) *Homogeneous system* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 沒有 *nontrivial solution.*

(3) $\mathrm{rank}(A) = n$.

(4) 存在 $n \times m$ *matrix* B 使得 $BA = I_n$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2): 利用反證法, 假設 $\mathbf{x}=\mathbf{u}$ 為 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一組 nontrivial solution 而 $\mathbf{x}=\mathbf{c}$ 為 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解, 則由 Lemma 2.4.4 知 $\mathbf{x}=\mathbf{c}+\mathbf{u}\neq\mathbf{c}$ 會是 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的另一組解. 此與 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解唯一相矛盾, 故知 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 沒有 nontrivial solution.

(2) $\Rightarrow$ (3): $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 沒有 nontrivial solution, 表示 A 化成 echelon form 後沒有 free variables. 也就是說所有的 variables 皆為 pivot variables. 因此 pivot 的個數就是未知數的個數 n, 故得 $\operatorname{rank}(A)=n$.

(3) $\Rightarrow$ (4): 假設 $\operatorname{rank}(A)=n$, 即 A 化為 echelon form 後, 其 pivot 的個數為 n. 考慮將 A 化為 reduced echelon form A'. 此時 A' 由於有 n 個 pivot, 所以每一個 pivot 必分別在 A' 前面 n 個 row 上. 而又 A' 為 $m\times n$ matrix, 有 n 個 column. 所以 A' 每一個 pivot 必落在 (i,i)-th entry, 其中 $1\leq i\leq n$. 又因為 A' 為 reduced echelon form, 此 n 個 pivots 的值皆為 1. 然而 reduced echelon form 每一個 pivot 所在的 column, 除了 pivot 所在位置外, 其他位置應為 0, 所以我們知 A' 必為以下的 matrix $A'=\begin{bmatrix} I_n \\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$, 即 A' 的前 n 個 row 就是 I_n. 由 Lemma 2.3.5, 我們知存在 $m\times m$ matrix E 使得 $EA=A'$. 現若令 E 的 i-th row 為 ${}_i\varepsilon$, 由 row 的觀點看矩陣乘法 (參見圖示 (2.15)), 我們有

$$EA=\begin{bmatrix} - & {}_1\varepsilon & - \\ & \vdots & \\ - & {}_n\varepsilon & - \\ & \vdots & \\ - & {}_m\varepsilon & - \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} - & {}_1\varepsilon A & - \\ & \vdots & \\ - & {}_n\varepsilon A & - \\ & \vdots & \\ - & {}_m\varepsilon A & - \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ & \mathbf{0} & \end{bmatrix}.$$

現若令 B 為 $n\times m$ matrix, 對於 $i=1,\ldots,n$, 其 i-th row 為 ${}_i\varepsilon$ (即 B 為截取 E 的前 n 個 row 的 $n\times m$ matrix), 則由前述的矩陣乘法性質知

$$BA=\begin{bmatrix} - & {}_1\varepsilon & - \\ & \vdots & \\ - & {}_n\varepsilon & - \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} - & {}_1\varepsilon A & - \\ & \vdots & \\ - & {}_n\varepsilon A & - \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=I_n.$$

(4) $\Rightarrow$ (1): 我們利用反證法假設 $\mathbf{c}\neq\mathbf{c}'\in\mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{x}=\mathbf{c},\mathbf{x}=\mathbf{c}'$ 皆為 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解. 亦即, $A\mathbf{c}=\mathbf{b}$ 且 $A\mathbf{c}'=\mathbf{b}$. 現已知存在 $B\in M_{n\times m}$ 使得 $BA=I_n$, 故得 $B\mathbf{b}=B(A\mathbf{c})=(BA)\mathbf{c}=\mathbf{c}$ 且 $B\mathbf{b}=B(A\mathbf{c}')=(BA)\mathbf{c}'=\mathbf{c}'$. 此結果 $\mathbf{c}=B\mathbf{b}=\mathbf{c}'$ 與當初假設 $\mathbf{c}\neq\mathbf{c}'$ 相矛盾, 故得證若 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解, 則解必唯一. □

再次提醒, Theorem 2.4.5, 並不能知道聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 是否有解. 它告訴我們若已知 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有 nontrivial solution, 則 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 要不然無解, 要不然會有無窮多解.

Question 2.11. *假設 $A\in M_{m\times n}$, $\mathbf{b},\mathbf{b}'\in\mathbb{R}^m$. 若已知 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}'$ 皆有解, 且 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解唯一. 是否 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}'$ 的也會唯一?*

前面已提過, 當 $A\in M_{m\times n}$, 將 A 化為 echelon form 後其 pivot 的個數應小於等於 $\min\{m,n\}$. 所以若 pivot 的個數為 n, 則表示 $m\geq n$. 換言之, 若 $m<n$, 我們便知 pivot 的個數不可能等於 n, 所以 Theorem 2.4.5 中的情況不可能發生. 我們有以下的結論.

Corollary 2.4.6. 假設 $A \in M_{m\times n}$, 其中 $m<n$. 若 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ 且聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解, 則解不唯一 (即必有兩個以上的解). 而且此時, 不會存在 $n\times m$ *matrix* B 使得 $BA=I_n$.

Proof. 由前所述, 當 $m<n$ 時 A 化為 echelon form 後, 其 pivot 的個數不可能為 n. 故由 Theorem 2.4.5 知 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有 nontrivial solution. 亦即在 $\mathbb{R}^n$ 存在非零向量 $\mathbf{c}$ 使得 $\mathbf{x}=\mathbf{c}$ 為 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 之一組解. 所以 Lemma 2.4.4 告訴我們, 若 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解, 則解不唯一.

另一方面 Theorem 2.4.5 也告訴我們若 pivot 的個數不是 n, 則不會存在 $n\times m$ matrix B 使得 $BA=I_n$. □

Theorem 2.4.5 也和 Theorem 2.4.2 一樣是很重要的定理, 它可以告訴我們一些解聯立方程組的訊息. 例如 Corollary 2.4.6 就是告訴我們當方程式的個數少於未知數的個數時, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 不可能有唯一解.

2.5. Invertible Matrix

所謂 invertible matrix 就是"可逆矩陣". 我們會發現只有 square matrix 才有可能是 invertible matrix, 但並不是所有的 square matrix 都是 invertible matrix. 這一節中我們會探討有關 invertible matrix 的相關性質, 並介紹判斷一個方陣是否為 invertible 且找出其反矩陣的方法.

當初我們將聯立方程組用矩陣乘法的方式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 來表示, 其中有一個很大的目的就是希望將解聯立方程式的問題此簡化成類似實數上解 $ax=b$ 的情形. 在實數情況, 當 $a\neq 0$ 時, $ax=b$ 的解就是很簡單的 $x=ba^{-1}$. 但在矩陣的情形, 我們沒有除法, 所以只能借助乘法來幫忙. 由於實數中 a^{-1} 有 $a^{-1}a=aa^{-1}=1$ 的性質, 所以推廣這個概念至矩陣, 我們便希望找到矩陣 B 滿足 BA 以及 AB 為 identity. 不過當 $A\in M_{m\times n}$ 且 $m\neq n$ 時, 由 Corollary 2.4.3 以及 Corollary 2.4.6, 我們知道不可能存在 B 同時滿足 BA 和 AB 皆為 identity matrix (因為 $\operatorname{rank}(A)$ 不可能同時為 m 和 n). 所以我們僅對 $m=n$, 即 A 為 square matrix 時有以下的定義.

Definition 2.5.1. 假設 $A\in M_{n\times n}$ 為 n 階 square matrix, 若存在 $B\in M_{n\times n}$ 使得 $AB=BA=I_n$, 則稱 A 為 *invertible*. 反之, 我們稱 A 為 *non-invertible*

再一次強調當 A 不是方陣時, 我們知 A 絕對不是 invertible. 因此當我們不知矩陣 A 的階數時, 絕對不能用存在 B 滿足 BA 為 identity 來說 A 為 invertible, 必須檢查另一邊 AB 亦為 identity 才可. 不過當 A 為 $n\times n$ square matrix, 確實檢查單邊就可以確定 A 為 invertible. 我們有以下的性質.

Theorem 2.5.2. 假設 $A\in M_{n\times n}$ 為 n 階 *square matrix.* 則下列是等價的.

(1) A 為 *invertible matrix.*

(2) 存在 $B\in M_{n\times n}$ 使得 $BA=I_n$.

(3) $\text{rank}(A) = n$.

(4) 存在 $C \in M_{n\times n}$ 使得 $AC = I_n$.

Proof. 依 A 為 invertible 的定義, 我們知若 A 為 invertible, 則存在 $B \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$. 故 $(1) \Rightarrow (2)$.

由 A 為 $n \times n$ matrix 以及 Theorem 2.4.5 知存在 $B \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$ 若且唯若 A 化為 echelon form 後 pivot 的個數為 n. 故 $(2) \Leftrightarrow (3)$.

同理, 由 A 為 $n \times n$ matrix 以及 Theorem 2.4.2 知存在 $C \in M_{n\times n}$ 使得 $AC = I_n$ 若且唯若 A 化為 echelon form 後 pivot 的個數為 n. 故 $(3) \Leftrightarrow (4)$.

最後, 由 A 化為 echelon form 後 pivot 的個數為 n 知存在 $B,C \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$ 以及 $AC = I_n$. 若能證得 $C = B$, 則由 $BA = AB = I_n$ 得證 A 為 invertible. 然而由 $BA = I_n$, 得 $(BA)C = I_nC = C$. 又由 $(BA)C = B(AC) = BI_n = B$, 得證 $B = C$. 故 $(3) \Rightarrow (1)$. 得證本定理. □

當一個 $n \times n$ matrix 的 rank 為 n 時, 有的書為了強調這個 rank 和階數相等的特殊情況, 特別稱之為 *nonsingular matrix*. 所以由 Theorem 2.5.2 我們知 invertible matrix 就是 nonsingular matrix. 反之, non-invertible matrix 就是 singular matrix. 不過為了讓大家不被這麼多名詞弄混. 以後我們一律採用 invertible 和 non-invertible 這樣的說法, 而不用 nonsingular 和 singular 這樣的說法.

由 Theorem 2.5.2 的證明我們知若 $A \in M_{n\times n}$ 且存在 $B,C \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$ 且 $AC = I_n$, 則 $B = C$. 我們自然會問有沒有可能存在不同的 $B,B' \in M_{n\times n}$ 皆滿足 $BA = I_n$ 以及 $B'A = I_n$. 下一個定理告訴我們這樣的方陣其實是唯一的.

Corollary 2.5.3. 假設 $A \in M_{n\times n}$ 且 $B,B' \in M_{n\times n}$ 滿足 $BA = I_n$ 以及 $B'A = I_n$. 則 $B = B'$.

Proof. 由 Theorem 2.5.2 我們知 A 為 invertible 且由其證明知 $BA = AB = I_n$ 以及 $B'A = AB' = I_n$. 故

$$B = I_nB = (B'A)B = B'(AB) = B'I_n = B'.$$

□

由 Corollary 2.5.3, 我們知道若 A 為 $n \times n$ invertible matrix, 則僅會存在唯一的一個 $n \times n$ matrix B 滿足 $BA = AB = I_n$. 它和 A 的關係如同在實數上非零實數的乘法的 inverse (乘法反元素), 所以我們給以下的定義.

Definition 2.5.4. 假設 $A \in M_{n\times n}$ 為 invertible matrix. 我們稱唯一滿足 $BA = AB = I_n$ 的 $n \times n$ matrix B 為 A 的 *inverse* (反矩陣), 且用 A^{-1} 表示.

給定一 $n \times n$ invertible matrix A 由於其反矩陣是唯一的, 所以若要確定 $B = A^{-1}$ 我們僅要檢查是否 $BA = I_n$ 或 $AB = I_n$ 即可. 我們有以下之性質

Proposition 2.5.5. 假設 $A,B \in M_{n\times n}$. 我們有以下之性質

(1) 若 A 為 *invertible,* 則 A^{-1} 亦為 *invertible* 且
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(2) A 為 *invertible* 若且唯若 A^{t} 為 *invertible* 且此時
$$(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}.$$

(3) A,B 皆為 *invertible* 若且唯若 AB 為 *invertible.* 且此時
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proof. 由 Theorem 2.5.2, 我們要說一個 $n\times n$ matrix 為 invertible, 只要找到 $B \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$ 或 $AB = I_n$ 且此時由唯一性 (Corollary 2.5.3) 知 $B = A^{-1}$.

(1) 依定義 A^{-1} 亦為 $n\times n$ matrix 故 Theorem 2.5.2 適用. 利用 $A^{-1}A = I_n$, 得知 A^{-1} 亦為 invertible 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) 依定義 A^{t} 亦為 $n\times n$ matrix 故 Theorem 2.5.2 適用. 由 $A^{-1}A = I_n$ 利用 Proposition 2.2.4 得
$$I_n = (A^{-1}A)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}}(A^{-1})^{\mathrm{t}}$$
故知 A^{t} 為 invertible 且 $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$. 反之若 A^{t} 為 invertible, 由前知 $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}$ 為 invertible, 故由利用 Proposition 2.2.4 $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = A$ 得證 A 為 invertible.

(3) 依定義 AB 為 $n\times n$ matrix 故 Theorem 2.5.2 適用. 現若 A,B 皆為 invertible, 則由
$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$
得證 AB 為 invertible 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 反之, 若 AB 為 invertible, 且令 $C = (AB)^{-1}$. 此時由 $(AB)C = I_n$ 得 $A(BC) = I_n$, 故由假設 A 為 $n\times n$ matrix 以及 Theorem 2.5.2 得證 A 為 invertible. 同理, 由 $C(AB) = I_n$, 得 $(CA)B = I_n$, 得證 B 為 invertible. □

要注意 Proposition 2.5.5 (3) 中由 AB invertible 推得 A,B 皆為 invertible 是需要用到 A,B 皆為 $n\times n$ matrix. 否則當 $m \neq n$ 時, 在 Theorem 2.4.2 中我們知道有可能 $A \in M_{m\times n}, C \in M_{n\times m}$ 滿足 $AC = I_m$. 此時 I_m 為 invertible, 但 A,C 皆為 non-invertible. 同樣的, 當 A,B 為方陣時, 因為由 AB 為 invertible 可推得 A,B 皆為 invertible, 故知 BA 亦為 invertible. 也就是說當 A,B 為方陣時 AB 為 invertible 和 BA 為 invertible 是等價的. 但在 A,B 不為方陣時, 若 AB 為 invertible 會導致 BA 不為 invertible.

Question 2.12. 試舉例 A,B 不為 *invertible* 但 AB 為 *invertible.* 同時也驗證此時 BA 為 *non-invertible.*

接下來我們探討如何判別一個具體的 $n\times n$ matrix 是否為 invertible, 且若為 invertible 如何找出其 inverse. 這個問題可藉由將方陣利用 elementary row operations 化為 reduced echelon form 來處理. 事實上, 當 A 為 $n\times n$ matrix, 由 Theorem 2.5.2 我們知道 A 為 invertible 若且唯若 A 化為 echelon form 後其 pivot 的個數等於 n. 因此我們只要將 A 化為 echelon form 後計算其 pivot 的個數, 便可以知道 A 是否為 invertible. 若 A 為 invertible, 即

pivot 的個數為 n, 此時由於 A 的 reduced echelon form 為 $n\times n$ matrix, 故得 A 的 reduced echelon form 為 I_n. 也就是說我們可以用 elementary row operations 將 A 化為 I_n. 故由 Lemma 2.3.5 我們知存在 $E\in M_{n\times n}$ 為一些 elementary matrix 的乘積使得 $EA=I_n$. 事實上若將 augmented matrix $[A|I_n]$ 利用 elementary row operations 化為 $[I_n|E]$, 則 $EA=I_n$, 故此時 E 就是 A^{-1}. 我們看以下的例子.

Example 2.5.6. 考慮矩陣

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

我們要決定是否 A 是否為 invertible. 若為 invertible, 要找出 A^{-1}.

我們直接考慮 augmented matrix $[A|I_4]$, 利用 elementary row operation 將 A 的部分轉換成 echelon form. 首先將 1-st row 分別乘上 -1, 3 加至 3-rd, 4-th row, 即

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

接著將 3-rd row 乘上 3/2 加至 4-th row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right].$$

此時 augmented matrix 左半部為 echelon form, 其 pivot 的個數為 4, 故知 A 為 invertible. 我們繼續將左半部化為 reduced echelon form 便可得到 A^{-1}.

先將 4-th row 乘以 2, 然後將所得的 augmented matrix 的 4-th row 分別乘上 -3, -4, 1 加至 3-rd, 2-nd 和 1-st row, 即

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 & 1 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -10 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

接著將 3-rd row 乘以 $-1/2$, 然後將所得的 augmented matrix 的 3-rd row 分別乘上 3, -1 加至 2-nd 和 1-st row, 即

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 & 1 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

最後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 -1. 此時所得 augmented matrix 左半部為 reduced echelon form (即 I_4), 故其右半部為 A^{-1}, 即

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

由前面討論我們知當 $A\in M_{n\times n}$ 為 invertible, 則存在 elementary matrices $E_1,\ldots,E_k$ 使得 $(E_k\cdots E_1)A=I_n$. 亦即 $A^{-1}=E_k\cdots E_1$, 由 Proposition 2.5.5 (3), 我們知 $E_1,\ldots,E_k$ 皆為 invertible, 且由 $(A^{-1})^{-1}=A$, 得 $A=E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}$. 事實上這些 elementary matrix E_i 的 inverse 就是將 E_i 還原成 I_n 的 elementary row operation 所對應的 elementary matrix. 也就是說 E_i^{-1} 亦為 elementary matrix. 因此我們有以下的定理.

Proposition 2.5.7. *A 為 invertible matrix 若且唯若 A 為一些 elementary matrices 的乘積.*

Example 2.5.8. 考慮矩陣

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

在求 A 的 inverse 的過程中, 首先我們將 1-st row 和 2-nd row 交換. 令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_1. 因用相同的 elementary row operation 可將 E_1 還原成 I_3, 故 $E_1=E_1^{-1}$, 即

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], E_1=E_1^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

接著將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 -1 加至 3-rd row. 令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_2. 因將 2-nd row 乘上 1 加至 3-rd row 的 elementary row operation 可將 E_2 還原成 I_3, 故所得的 augmented matrix 及 E_2,E_2^{-1} 分別為

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, E_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

然後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 $1/2$. 令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_3. 因將 2-nd row 乘上 2 的 elementary row operation 可將 E_3 還原成 I_3, 故所得的 augmented matrix 及 E_3,E_3^{-1} 分別為

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], E_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

最後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 1 加至 1-st row. 令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_4. 因將 2-nd row 乘上 -1 加至 3-rd row 的 elementary row operation 可將 E_4 還原成 I_3, 故所得的 augmented matrix 及 E_4, E_4^{-1} 分別為

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我們檢查可得

$$A^{-1} = E_4E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

最後讓我們回到解聯立方程組的問題. 怎樣的 $A \in M_{m\times n}$ 會使得對任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆有解且解唯一呢? 由 Theorem 2.4.2 和 Theorem 2.4.5 知此時 $\operatorname{rank}(A) = m$ 且 $\operatorname{rank}(A) = n$, 即 $m = n$. 也就是說 A 必須是 $n \times n$ 且 $\operatorname{rank}(A) = n$. 因此由 Theorem 2.5.2 知 A 為 $n \times n$ invertible matrix. 事實上我們有以下的等價關係. 由於它們直接套用 Theorem 2.4.2 和 Theorem 2.4.5 就可推得, 我們就不再證明了.

Theorem 2.5.9. *假設 $A \in M_{n\times n}$, 令 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ 為 A 的 column vectors. 則下列是等價的.*

(1) *A 為 invertible matrix.*

(2) *$\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathbb{R}^n$.*

(3) *對於任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆有解.*

(4) *聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 沒有 nontrivial solution.*

(5) *對於任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆有解且解唯一.*

設 $A \in M_{n\times n}$ 為 invertible matrix, 則對任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 我們可以利用 A 的反矩陣 A^{-1} 得到聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的唯一解. 事實上若令 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, 此時 $A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = \mathbf{b}$. 又由 Theorem 2.5.9 知此時 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解唯一. 故 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 唯一的一組解.

Example 2.5.10. 考慮聯立方程組

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & b_1 \\ & -x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = & b_3 \\ -3x_1 & & & -x_4 & = & b_4 \end{array}$$

其中 b_1, b_2, b_3, b_4 為任意實數. 由於此時聯立方程組為 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中 A 為 Example 2.5.6 中的 4×4 matrix A 且 $\mathbf{b} = [b_1\ b_2\ b_3\ b_4]^{\mathrm{t}}$. 因 A 為 invertible, 故由 Theorem 2.5.9 知, 對任意實數 b_1, b_2, b_3, b_4, 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 必有解且其解唯一. 事實上此唯一解為

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 - b_3 - b_4 \\ -3b_1 - b_2 - b_4 \\ 5b_1 + 4b_3 + 3b_4 \\ 3b_1 + 3b_3 + 2b_4 \end{bmatrix}.$$

Chapter 3

Vector Spaces

在這一章中, 我們利用大家熟悉的坐標平面中的向量, 將之推廣到所謂的 vector space (向量空間) 這一種有特定代數結構的系統, 是線性代數中主要的探討對象.

3.1. 坐標平面中的向量

本節針對對抽象數學論述不熟悉的同學, 想利用大家熟悉坐標平面的向量慢慢引導進入狀況.

在平面中的向量我們可以用幾何的方式規定向量的加法及其倍數關係. 相信大家對這種定法已相當熟悉, 在這裡我們不再重複. 我們可以將平面坐標化, 這就是所謂的坐標平面. 這種在坐標平面中的向量, 我們都可用 (a,b) 來表示, 其中 $a,b \in \mathbb{R}$ (我們用 $\mathbb{R}$ 來表示所有實數所成的集合, 所以 $a,b \in \mathbb{R}$ 表示 a,b 皆為實數).

用坐標來表示一個向量 (即用 (a,b) 這種方法) 有許多好處, 例如大家很容易理解: 當兩個向量 (a,b) 和 (c,d) 相等時 (即 $(a,b)=(c,d)$), 這表示 $a=c$ 且 $b=d$; 坐標表示法的另一個好處是很容易幫助我們定義向量的加法 (*addition*) 以及係數積 (*scalar multiplication*).

Definition 3.1.1. 令 $\mathbf{u}=(a_1,a_2),\mathbf{v}=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$ 以及 $r\in\mathbb{R}$. 我們定義

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(a_1+b_1,a_2+b_2) \quad \text{and} \quad r\mathbf{u}=(ra_1,ra_2).$$

這裡我們要強調, Definition 3.1.1 中所定義的加法及係數積, 和矩陣的加法及係數積是一致的. 基於符號的方便性, 當我們要用符號來表示一個向量時, 會用 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 這類的粗體字符號來表示. 一般來說我們用 $\mathbb{R}^2$ 來表示坐標平面上的向量所成的集合, 所以若我們說 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, 就表示 $\mathbf{v}$ 是坐標平面上的一個向量, 也就是說可以找到 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{v}=(a,b)$.

一般來說有了定義之後, 我們就需依定義處理相關問題, 但通常直接依定義處理較繁複, 我們可已先依定義推導出一些性質, 利用這些性質簡化處理程序, 再處理更進一步的問題. 例如在微積分, 我們定義出一個函數在某一點的極限後, 若每次都得依定義處理極限問題論證起來很複雜; 但當我們利用定義推導出一些極限的性質後, 用這些性質處理極限問題就簡單方便多了. 所以在定義之後我們會有一些定理 (Proposition 或 Theorem) 來論證一些依

定義可得的性質, 以方便我們處理更進一步的問題. 以下就是要談向量加法及係數積有關的性質.

Proposition 3.1.2. 對於 $\mathbb{R}^2$ 上的向量, 我們有以下的性質:

(1) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

(2) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

(3) 存在一向量 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(4) 對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ 皆可找到 $\mathbf{u}'\in\mathbb{R}^2$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

(5) 對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(6) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $r(s\mathbf{u})=(rs)\mathbf{u}$.

(7) 對任意 $r\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^2$ 皆有 $r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$.

(8) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, 皆有 $(r+s)\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$.

通常一個定理敘述完就要證明, 不過這幾項的證明都僅是一般制式的代數操作, 相信大家都很熟悉, 這裡就不再證明了. 對同學來說了解定理說些什麼比起證明來得重要. 在這裡我們就一一說明一下這個定理說些什麼.

(1) 敘述的是所謂向量加法的交換性. 它告訴我們在處理向量加法時可以依方便交換順序. 或許同學覺得這個很自然為何還要證明. 事實上只要是定義未提的事情都要證明, 不能因為覺得自然而不去處理. 在證明時會發現這個性質會成立主要是實數加法有交換性. 不過數學上是存在許多“抽象”的數系它的運算是不能交換的. 所以經由證明不只讓我們確認事情是對的, 也能幫助我們釐清事情是對的其背後的主要因素.

(2) 說的就是所謂的結合律, 它依然是因為實數加法的性質而成立. 這裡 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ 是說先將 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 相加後所得的向量再和 $\mathbf{w}$ 相加. 這樣所得的向量和先將 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 相加後再和 $\mathbf{u}$ 相加會是同樣的向量. 因為向量的加法是定義兩個向量的加法, 所以兩個以上的向量相加結合律就顯得重要了. 有了結合律, 我們就不必擔心哪兩個向量先加. 結合律雖然也是談向量加法的順序問題, 不過和 (1) 所談的順序是兩回事, 大家應該要分清楚.

(3) 談的就是所謂的零向量, 零向量的特點就是加上任何向量都不動. 為什麼要特別談零向量的存在性? 這就好比在實數上若沒有零的概念就沒有減法一樣, 在向量的運算上是相當重要的. 尤其以後要用抽象的方式談向量系統時零向量的存在性更不容忽視.

(4) 談的就是所謂的反向量, 要注意需有零向量的存在才能談反向量. 而且要區分清楚這裡的敘述是給了 $\mathbf{u}$ 後可找到 $\mathbf{u}'$ 使得 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$. 這裡 $\mathbf{u}'$ 是會隨著 $\mathbf{u}$ 而改變, 而不是一個固定的向量和所有的向量加起來會是零向量. 數學的敘述要弄清楚否則差之毫釐失之千里.

(5) 指的是所有向量乘上 1 後仍不動. 這裡特別提出來其實和零向量意義很像, 唯有 1 的引入以後才能談係數的除法. 例如已知 $2\mathbf{u}=\mathbf{v}$, 就可利用 (6) 的性質兩邊乘上 $1/2$, 得

$$\mathbf{u}=1\mathbf{u}=\frac{1}{2}(2\mathbf{u})=\frac{1}{2}\mathbf{v}.$$

(6),(7),(8) 談的是係數積的性質, 例如 $r(s\mathbf{u})$ 表示是先將 $\mathbf{u}$ 乘上 s 倍後所得的向量再乘上 r, 而 $(rs)\mathbf{u}$ 是表示先將 r,s 乘在一起得 rs 再乘上 $\mathbf{u}$. 這幾個性質也都和實數乘法性質息息相關, 雖然看起來不顯眼但在處理向量的運算時非常重要.

最後要強調一下: 這裡將這些性質列出, 並不是要求大家將這幾個性質背下來. 一來我們希望大家知道有些性質不能覺得理所當然就不去證明, 另一方面也讓大家知道以後在處理向量運算時可以放心且自然的使用這幾個性質. 這些性質也讓坐標平面上向量的系統享有許多豐富的性質.

Question 3.1. 利用 $\mathbb{R}^2$ 向量加法的定義, 試證明以下性質:

(1) $\mathbf{0}=(0,0)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中唯一的向量滿足對任意 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(2) 給定 $\mathbf{u}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, 試證明 $\mathbf{u}'=(-a,-b)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中唯一的向量滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

坐標平面上向量的運算也可推廣到坐標空間, 即 $\mathbb{R}^3$. 同樣的概念也可推廣到更一般的 $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$. 這些系統中的運算都享有 Proposition 3.1.2 的 8 項性質, 而這些性質讓這些系統有著豐富的性質. 所以接下來我們將專注於有這 8 項性質的系統, 稱之為 vector space (向量空間).

3.2. Vector Space 的定義及其基本性質

我們曾經提過像 $\mathbb{R}^2$ 這樣, 裡面任意兩個向量相加仍在 $\mathbb{R}^2$ 中且向量乘上任意的實數後也仍在 $\mathbb{R}^2$, 而向量的運算又符合 Proposition 3.1.2 的 8 項規則, 我們便稱之為 vector space. 在這一節中我們將正式定義 vector space 並探討 vector space 相關性質.

給定一非空集合 V, 我們說 V 中有加法運算 (addition) $+$, 表示對於任意 V 中兩個元素 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, 經由這個運算所得的結果 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 仍然是 V 中的元素 (此為加法封閉性). 至於係數積 (scaler multiplication) 我們要注意的是, 可以乘在向量上的數所在的數系必須像實數一樣有加法與乘法, 且加法, 乘法都是有交換律及結合律, 還有加法乘法之間要有分配律. 更重要的是這個數系裡非 0 的元素都有乘法反元素. 這樣的數系我們稱之為 *field* (體). 例如實數 $\mathbb{R}$ 和有理數 $\mathbb{Q}$ 在我們一般熟悉的加法, 乘法運算下都是 field, 但是整數 $\mathbb{Z}$ 就不是 field, 因為除了 ±1 以外其他的非 0 整數在 $\mathbb{Z}$ 中就無法找到乘法反元素. 由於以後我們談的向量空間, 向量前所乘的係數所在的數系只要是 field, 則我們所要探討的性質都會成立. 所以係數積我們都不會強調是哪一個 field, 而用 $\mathbb{F}$ 來表示. 不過由於我們給的例子大多是係數積為 $\mathbb{R}$ 的情況, 所以若對 field 的概念覺得陌生, 不妨就用 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 的情況來思考即可. 現若 $\mathbb{F}$ 是一個 field, 我們說 $\mathbb{F}$ 對 V 有係數積表示對任意 $c\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{v}\in V$, 皆有 c 對 $\mathbf{v}$ 所得係數積 $c\mathbf{v}$ 仍然在 V 中 (此為係數積封閉性). 當一個集合 V 上有加法運算, 且 field $\mathbb{F}$ 對其有係數積, 則我們可以探討其是否為 vector space, 也就是說探討它是否符合以下之定義.

Definition 3.2.1. 假設非空集合 V 中有加法運算 $+$, 以及 field $\mathbb{F}$ 對 V 的係數積. 若這兩種運算符合以下 8 項性質, 則稱 V 為一個 *vector space over* $\mathbb{F}$.

(1) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.

(2) 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$, 皆有 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$.

(3) 存在一向量 $\mathbf{0}\in V$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(4) 對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆可找到 $\mathbf{u}'\in V$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

(5) 對任意 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$.

(6) 對任意 $r,s\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $r(s\mathbf{u})=(rs)\mathbf{u}$.

(7) 對任意 $r\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ 皆有 $r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$.

(8) 對任意 $r,s\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u}\in V$, 皆有 $(r+s)\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$.

在此要說明一下, 一般來說我們不能說一個集合是 vector space, 一定要附帶說明它的加法及係數積為何. 不過當我們談到一般抽象的 vector space 時, 我們說 V 是一個 vector space over $\mathbb{F}$ 時就隱含其中有加法運算且直接用 $+$ 表示, 同時也隱含 $\mathbb{F}$ 是一個 field 且 V 中有 $\mathbb{F}$ 的係數積, 而不再去強調其中有加法及係數積. 同樣的對於常見的 vector space, 例如 $\mathbb{R}^n$, 由於我們已經有常用的加法及係數積, 所以不會再次強調其加法及係數積為何. 不過當我們要介紹一個新的具體的 vector space 時, 就一定要說明如何定出其加法及係數積. 尤其要注意, 我們必須明確說是 over 哪一個 field 的 vector space (以後我們會看到例子, 同樣的集合看成 over 不同的 field 的 vector space 影響會很大).

接下來我們看一些有關 vector space 的例子.

Example 3.2.2. (A) 考慮 S 為所有次數等於 2 的有理係數多項式所成的集合. 對 S 中兩多項式 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=a'x^2+b'x+c'$ 我們定義

$$f(x)+g(x)=(a+a')x^2+(b+b')x+(c+c').$$

S 在這加法定義下並無封閉性. 例如 $f(x)=x^2+2x+1\in S$ 且 $g(x)=-x^2\in S$, 但 $f(x)+g(x)=2x+1\not\in S$. 所以在此加法下 S 不是 vector space. 現考慮 $P_2(\mathbb{Q})$ 為次數小於等於 2 的有理係數多項式所成的集合. 利用剛才的加法定義, 我們可得這個加法對 $P_2(\mathbb{Q})$ 有封閉性. 另外若對任意實數 $r\in\mathbb{R}$, 我們定義 r 對 $f(x)=ax^2+bx+c\in P_2(\mathbb{Q})$ 的係數積為 $r\cdot f(x)=(ra)x^2+(rb)x+(rc)$. 在此定義之下實數對 $P_2(\mathbb{Q})$ 的係數積並無封閉性, 例如 $\sqrt{2}$ 乘上 $P_2(\mathbb{Q})$ 的元素 x^2+x+1 會是 $\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}$ 就不再是 $P_2(\mathbb{Q})$ 的元素, 所以在此定義之下 $P_2(\mathbb{Q})$ 也不是 over $\mathbb{R}$ 的 vector space. 不過若同樣的定義考慮有理數 $\mathbb{Q}$ 對 $P_2(\mathbb{Q})$ 的係數積, 則會符合封閉性. 所以我們可以考慮 $P_2(\mathbb{Q})$ 是否是 vector space over $\mathbb{Q}$. 事實上我們很容易驗證此時的加法與係數積會符合 vector space 的 8 個性質, 所以在此定義之下 $P_2(\mathbb{Q})$ 確實是 vector space over $\mathbb{Q}$. 同樣的若 n 是正整數, 若令 $P_n(\mathbb{F})$ 為次數小於 n 且係數在 $\mathbb{F}$ 的多項式所成的集合, 利用上述加法及係數積的定義, 我們可得 $P_n(\mathbb{F})$ 是一個 over $\mathbb{F}$ 的 vector space.

(B) 對任意的 field $\mathbb{F}$, 考慮 $P(\mathbb{F})$ 為所有以 $\mathbb{F}$ 的元素為係數的多項式所成的集合. 利用如 (A) 中定義多項式的加法與係數積, 我們可以證明 $P(\mathbb{F})$ 為 vector space. 首先若 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0, g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0\in P(\mathbb{F})$, 其中 $m\leq n$, 則我們可以將 $g(x)$ 寫成 $g(x)=b_nx^n+\cdots+b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$, 其中 $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_{m+1}=0$. 為了方便

起見雖然多項式的次數可能不同, 以後我們都用這種方式將它們補成相同次數再相加. 所以我們可以將 $f(x)+g(x)$ 的定義寫成 $f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$. 而對於 $r\in\mathbb{F}$, 係數積 $rf(x)$ 的定義為 $rf(x)=\sum_{i=0}^{n}(ra_i)x^i$. 利用這個定義以及 $\mathbb{F}$ 是 field 的假設, 我們知道在此定義之下加法和係數積確為 $P(\mathbb{F})$ 中的運算 (有封閉性). 接著我們要一一檢查是否符合 vectors space 的 8 項運算規則.

(1) 對任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in P(\mathbb{F})$ 我們有

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(b_i+a_i)x^i=g(x)+f(x).$$

(2) 對任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i, h(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i\in P(\mathbb{F})$ 我們有

$$(f(x)+g(x))+h(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i+\sum_{i=0}^{n}c_ix^i=\sum_{i=0}^{n}((a_i+b_i)+c_i)x^i,$$

$$f(x)+(g(x)+h(x))=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n}(b_i+c_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(a_i+(b_i+c_i))x^i.$$

由於 $(a_i+b_i)+c_i=a_i+(b_i+c_i)$, 故得證 $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$.

(3) 考慮零多項式 $g(x)=0=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 其中 $b_i=0$, $\forall i=0,1,\ldots,n$. 此時對任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 可得

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=f(x).$$

(4) 給定 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 我們考慮 $h(x)=\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i\in P(\mathbb{F})$, 則

$$f(x)+h(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i-a_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}0x^i=0.$$

(5) 對任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 皆有

$$1f(x)=\sum_{i=0}^{n}(1a_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=f(x).$$

(6) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 我們有

$$r(sf(x))=r(\sum_{i=0}^{n}(sa_i)x^i)=\sum_{i=0}^{n}(r(sa_i))x^i=\sum_{i=0}^{n}((rs)a_i)x^i=(rs)\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=(rs)f(x).$$

(7) 對任意 $r,s\in\mathbb{R}$ 以及 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in P(\mathbb{F})$, 皆有

$$(r+s)f(x)=\sum_{i=0}^{n}((r+s)a_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(ra_i+sa_i)x^i=\sum_{i=0}^{n}(ra_i)x^i+\sum_{i=0}^{n}(sa_i)x^i=rf(x)+sf(x).$$

(8) 對任意 $r\in\mathbb{R}$ 以及 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in P(\mathbb{F})$ 皆有

$$r(f(x)+g(x))=r(\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i)=\sum_{i=0}^{n}(r(a_i+b_i))x^i=\sum_{i=0}^{n}(ra_i+rb_i)x^i=rf(x)+rg(x).$$

因為 $P(\mathbb{F})$ 的加法與 $\mathbb{F}$ 的係數積符合 vector space 的 8 項運算規則, 所以在這個加法與係數積的運算之下 $P(\mathbb{F})$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$. 例如所有有理係數多項式所成的集合 $P(\mathbb{Q})$ 就是一個 over $\mathbb{Q}$ 的 vector space, 而實係數多項式所成的集合 $P(\mathbb{R})$ 就是一個 vector space over $\mathbb{R}$. 有趣的是 $P(\mathbb{R})$ 也是一個 vector space over $\mathbb{Q}$, 大家想想看為什麼.

(C) 給定任意 $n \in \mathbb{N}$, 以及一個 field $\mathbb{F}$. 我們令 $\mathbb{F}^n = \{(a_1,\ldots,a_n) : a_i \in \mathbb{F}\}$. 我們沿用 $\mathbb{R}^2$ 中向量的加法及係數積來定義 $\mathbb{F}^n$ 中向量的加法以及係數積. 令 $\mathbf{u} = (a_1,\ldots,a_n), \mathbf{v} = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{F}^n$ 以及 $r \in \mathbb{F}$. 我們定義

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n) \quad \text{and} \quad r\mathbf{u} = (ra_1,\ldots,ra_n).$$

依此定義我們很容易驗證此加法和係數積運算在 $\mathbb{F}^n$ 是封閉的, 而且符合 vector space 的 8 項運算規則, 所以在這個加法與係數積的運算之下 $\mathbb{F}^n$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$. 同樣的考慮所有 entry 皆為 $\mathbb{F}$ 中元素的 $m \times n$ 矩陣所成的集合 $M_{m,n}(\mathbb{F})$ 利用一般矩陣的加法及係數積, 我們也可利用之前談論矩陣加法性質 (Proposition 2.1.3) 一樣的方法驗證 $M_{m,n}(\mathbb{F})$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$.

(D) 給定一非空集合 S 以及 field $\mathbb{F}$, 我們令 $F(S,\mathbb{F})$ 表示所有定義域是 S 且對應域是 $\mathbb{F}$ 的函數所成的集合. 現若 $f,g \in F(S,\mathbb{F})$, 表示對任意 $s \in S$, $f(s),g(s)$ 都會是 $\mathbb{F}$ 中的元素. 所以我們定義 $f+g$ 為定義域是 S 且對應域是 $\mathbb{F}$ 的函數, 其定義為 $f+g$ 在任意 $s \in S$ 的取值為 $f(s)+g(s)$. 亦即 $(f+g)(s) = f(s)+g(s), \forall s \in S$. 對任意 $c \in \mathbb{F}$ 我們也定義 cf 為定義域是 S 且對應域是 $\mathbb{F}$ 的函數, 其定義為 cf 在任意 $s \in S$ 的取值為 $c \cdot f(s)$. 亦即 $(cf)(s) = c \cdot f(s), \forall s \in S$. 由於在此定義之下 $f+g$ 和 cf 仍然在 $F(S,\mathbb{F})$ 中, 所以此加法和係數積運算在 $F(S,\mathbb{F})$ 是封閉的. 我們可以驗證這兩種運算也符合 vector space 的 8 項運算規則, 所以在這個加法與係數積的運算之下 $F(S,\mathbb{F})$ 是一個 vector space over $\mathbb{F}$.

Question 3.2. 依照 *Example 3.2.2 (D)* 的定義, 試說明 $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F(\mathbb{R},\mathbb{Q})$, $F(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ 以及 $F(\mathbb{Q},\mathbb{R})$ 中那些是 *vector space over* $\mathbb{R}$? 哪些是 *vector space over* $\mathbb{Q}$?

或許很多同學會疑惑, 為何在上一節和 Example 3.2.2中這 8 個性質要證明, 而一開始卻是定義不必證明呢? 要回答這個問題就要回歸到整個過程的演變. 上一節中我們定義了坐標平面向量加法及係數積, 然後驗證它們符合 Proposition 3.1.2 這 8 個性質. 而後由這些性質得到許多運算上很方便且豐富的性質. 事實上這些豐富的性質成立的原因, 主因並不是這些平面向量的加法和係數積是如何定義的, 而是由於它們符合 Proposition 3.1.2 這 8 個性質. 注意到這一點後, 我們專注於符合這 8 個性質的系統稱之為向量空間. 希望以後探討向量空間的問題, 可以不必用到它們真正的運算僅利用這 8 個性質就能得到向量空間所有的性質. 所以當我們想推導向量空間的性質時, 我們就可以直接套用定義中這 8 性質去推導, 這樣推導出來的結果便適用於所有的向量空間. 反過來說, 當我們遇到一個系統有加法, 有係數積, 只要我們能利用該系統的運算 "證明" 它符合這基本的 8 個性質, 那它就是向量空間. 因而所有向量空間的性質它都會符合了, 而不必再用該系統的運算一一去推導.