例如, 在 Question 3.1 中我們利用 $\mathbb{R}^2$ 加法的定義說明 vector space 性質 (3) 中 $\mathbf{0}$ 是唯一的而 (4) 中若給定 $\mathbf{u}$, 則反向量 $\mathbf{u}'$ 也是唯一的. 這兩個唯一性, 事實上不需要知道向量的加法如何定義, 直接用 vector space 的性質就可以證明, 也就是說這個結果對一般的 vector space 都成立. 首先我們看以下之定理.

Proposition 3.2.3. 假設 V 為 *vector space,* 且 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$. 若 $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$, 則 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$.

Proof. 利用 vector space 的性質 (4), 我們知道存在 $\mathbf{w}'\in V$ 滿足 $\mathbf{w}+\mathbf{w}'=\mathbf{0}$. 然而由 $\mathbf{u}+\mathbf{w}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ 知 $(\mathbf{u}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'=(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'$. 左式由性質 (2),(3) 可得 $(\mathbf{u}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'=\mathbf{u}+(\mathbf{w}+\mathbf{w}')=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$. 同理右式可得 $(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{w}'=\mathbf{v}+(\mathbf{w}+\mathbf{w}')=\mathbf{v}+\mathbf{0}=\mathbf{v}$, 得證 $\mathbf{u}=\mathbf{v}$. □

Proposition 3.2.3 告訴我們以後在 vector space 處理向量加法問題時, 可以自然地像處理實數一樣使用消去法. 利用這個結果, 我們可以用來處理上述零向量以及反向量的唯一性.

Corollary 3.2.4. 假設 V 為 *vector space,* 則在 V 中存在唯一的向量 $\mathbf{0}$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 另外, 給定 $\mathbf{u}\in V$, 存在唯一的 $\mathbf{u}'\in V$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$.

Proof. 首先證明 $\mathbf{0}$ 是唯一的. 假設 $\mathbf{0}'$ 也滿足 (3) 的性質, 即對任意 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}'+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 因此任取 $\mathbf{u}\in V$, 我們有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}=\mathbf{0}'+\mathbf{u}$, 故由 Proposition 3.2.3 知 $\mathbf{0}=\mathbf{0}'$, 得證唯一性.

另一方面, 給定 $\mathbf{u}\in V$, 若 $\mathbf{u}',\mathbf{u}''$ 皆滿足 (4) 的性質, 即 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{u}+\mathbf{u}''=\mathbf{0}$. 故由 Proposition 3.2.3 知 $\mathbf{u}''=\mathbf{u}'$, 得證唯一性. □

既然 $\mathbf{0}$ 是唯一的, 以後就用 $\mathbf{0}$ 這個專屬的符號來表示 V 中唯一符合 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, $\forall\mathbf{u}\in V$ 的這個元素, 且稱之為 V 的 *additive identity* 或依慣例稱之為 *zero vector*. 又給定 $\mathbf{u}\in V$, 存在唯一的 $\mathbf{u}'$ 使得 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$, 依慣例我們以後就用 $-\mathbf{u}$ 來表示這一個唯一的 $\mathbf{u}'$, 且稱之為 $\mathbf{u}$ 的 *additive inverse*. 而 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的 additive inverse $-\mathbf{v}$ 相加, 即 $\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$, 我們就用 $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ 來表示.

Question 3.3. 假設 V 為 *vector space.* 試證明對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $-(-\mathbf{v})=\mathbf{v}$.

接著我們要再強調的是, 雖然在性質 (3) 中提到 $\mathbf{0}$ 是必須滿足對所有 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$ 才可以 (事實上 Proposition 3.2.3 的證明需用到對所有 $\mathbf{u}$ 皆對才可以), 也就是說依定義要驗證對所有 $\mathbf{u}\in V$ 皆有 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 才能確定 $\mathbf{w}$ 是零向量. 不過當我們確定 V 是 vector space 之後, 就可利用 Corollary 3.2.4, 知道只要有一個 $\mathbf{u}\in V$, 會使得 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 就可以認定 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ 了. 利用這一個唯一性, 我們可以推得許多有關於 $\mathbf{0}$ 的性質. 為了方便起見, 我們列出以下的結果.

Proposition 3.2.5. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, 我們有以下之結果.

(1) 若對於 $\mathbf{w}\in V$ 存在 $\mathbf{u}\in V$ 使得 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 則 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$.

(2) 對任意 $\mathbf{v}\in V$ 皆有 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

(3) 對任意 $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $r\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(4) 對任意 $r \in \mathbb{F}, \mathbf{v} \in V$ 皆有 $(-1)(r\mathbf{v}) = -(r\mathbf{v}) = r(-\mathbf{v})$.

Proof. (1) 由於 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{0}$ 皆滿足 $\mathbf{w}+\mathbf{u} = \mathbf{u} = \mathbf{0}+\mathbf{u}$, 故利用 Proposition 3.2.3 推得 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

(2) 要證明 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 利用 (1), 我們只要檢查是否存在 $\mathbf{u} \in V$ 使得 $0\mathbf{v}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$. 事實上, 若考慮 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ 的情形, 此時因 $\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$, 故 $0\mathbf{v}+\mathbf{v} = 0\mathbf{v}+1\mathbf{v} = (0+1)\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$. 故得證 $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(3) 同理, 利用 (1), 我們考慮 $\mathbf{u} = r\mathbf{0}$ 的情況, 此時 $r\mathbf{0}+\mathbf{u} = r\mathbf{0}+r\mathbf{0} = r(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = r\mathbf{0} = \mathbf{u}$, 得證 $r\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(4) 這裡要證明的是 $(-1)(r\mathbf{v})$ 和 $r(-\mathbf{v})$ 都是 $r\mathbf{v}$ 的 additive inverse (反向量). 由 Corollary 3.2.4 我們知到只要驗證它們是否加上 $r\mathbf{v}$ 都會是 $\mathbf{0}$ 即可. 然而由 (2) 我們有

$$(-1)(r\mathbf{v})+r\mathbf{v} = (-1)(r\mathbf{v})+1(r\mathbf{v}) = (-1+1)(r\mathbf{v}) = 0(r\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

由 (3) 我們有

$$r(-\mathbf{v})+r\mathbf{v} = r(-\mathbf{v})+r(\mathbf{v}) = r(-\mathbf{v}+\mathbf{v}) = r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

因此得證 $(-1)(r\mathbf{v}) = -(r\mathbf{v}) = r(-\mathbf{v})$. □

由 Proposition 3.2.5 我們知當 $r = 0$ 或 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 時會有 $r\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 但若 $r \neq 0$ 且 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, 是否有可能 $r\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 呢? 答案是不可能. 這是因為若 $r\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 首先由 $r \neq 0$ 且 $\mathbb{F}$ 是一個 field, 我們知道存在 $r' \in \mathbb{F}$ 滿足 $r'r = 1$. 因此可以考慮 r' 乘上 $r\mathbf{v}$ 由 Proposition 3.2.5 (3) 得到 $r'(r\mathbf{v}) = r'\mathbf{0} = \mathbf{0}$. 然而由 vector space 運算性質 (5), (6) 我們有 $r'(r\mathbf{v}) = (rr')\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$. 也就是說 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 此與假設 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 相矛盾, 故知 $r\mathbf{v}$ 絕對不會是 $\mathbf{0}$.

Question 3.4. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$.

(1) 已知 $\mathbf{v} \in V$ 且 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. 試證明若 $r, s \in \mathbb{F}$ 且 $r\mathbf{v} = s\mathbf{v}$, 則 $r = s$.

(2) 已知 $r \in \mathbb{F}$ 且 $r \neq 0$. 試證明若 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 且 $r\mathbf{u} = r\mathbf{v}$, 則 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

利用以上結果證明若 V 是 *vector space over* $\mathbb{R}$ 且 V 中有非零元素, 則 V 有無窮多個元素.

總而言之, vector space 中所要求加法及係數積的 8 項性質, 就是要確保一個 vector space 中的元素運算都可像實數一般處理. 例如, 我們可以如實數一樣引用“減法”的符號, 也就是說將 $\mathbf{w}+(-\mathbf{v})$ 寫成 $\mathbf{w}-\mathbf{v}$. 如此一來以後我們在一些等式的推演時就直接沿用大家習慣的「移項」的說法. 例如 $2\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{w}$, 我們就直接移項且乘以 $1/2$ 得 $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{v})$.

3.3. Subspaces

在這一節, 我們介紹 subspace 的概念, 簡單地說, 對於一個 vector space 的非空子集合, 如果在此 vector space 的加法及係數積運算之下這個子集合亦為 vector space, 則稱為此 vector space 的 *subspace*.

Definition 3.3.1. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 W 為 V 的 nonempty subset. 若對 W 的元素利用原先 V 的加法及 $\mathbb{F}$ 係數積運算之下 W 亦為 vector space, 則稱 W 為 V 的 *subspace*.

雖然一個 vector space 的 subspace 仍為 vector space, 但要檢查是否為 subspace 不必像檢查 vector space 一樣要去檢查 8 項的運算規則. 這是因為原本 vector space 的 8 項運算規則中除了 (3)(4) 兩項會和所在的集合有關外, 其他各項僅是元素間的運算規則, 和所在的集合無關. 以下的定理告訴我們要辨認是否為 subspace, 只要檢查封閉性即可.

Proposition 3.3.2. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W 為 V 的非空子集合. 則 W 為 V 的 *subspace* 若且唯若對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$ 且 $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$ 以及 $r\mathbf{u}\in W$.

Proof. 首先假設 W 為 V 的 subspace. 由於 vector space 的首要條件就是加法與係數積的封閉性, 因此依 subspace 的定義 W 在 V 的加法以及係數積之下應有封閉性, 亦即對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$ 且 $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in W$ 以及 $r\mathbf{u}\in W$.

反之, 若 W 在 V 的加法以及係數積之下應有封閉性, 則依定義若此加法及係數積符合 vector space 的 8 項性質, 則 W 就是 over $\mathbb{F}$ 的 vector space, 因此依定義就是 V 的 subspace. 然而這 8 項性質中除了 (3), (4) 兩項外, 其餘了性質由於在 V 中的元素皆成立, 所以當然限制在 W 上依然成立. 因此我們僅要驗證 (3), (4) 兩項即可.

性質 (3) 要求的是在 W 中存在一元素 $\mathbf{w}\in W$ 滿足對任意 $\mathbf{u}\in W$ 皆有 $\mathbf{w}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$. 然而由於這些元素皆在 V 中, 而 Proposition 3.2.5 (1) 告訴我們此 $\mathbf{w}$ 就是 V 的 zero vector $\mathbf{0}$. 所以我們要檢查的是 $\mathbf{0}\in W$. 現因 W 不是空集合, 所以必定存在 $\mathbf{u}\in W$, 此時因 $0\in\mathbb{F}$ 且由封閉性 $0\mathbf{u}\in W$, 因此由 Proposition 3.2.5 (2) 得證 $\mathbf{0}=0\mathbf{u}\in W$.

性質 (4) 要求的是對任意 W 中的元素 $\mathbf{u}\in W$ 皆存在 $\mathbf{u}'\in W$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{u}'=\mathbf{0}$. 由於 $W\subseteq V$, $\mathbf{u}$ 亦在 V 中, 故由 additive inverse 的唯一性 (Proposition 3.2.4知 $\mathbf{u}'=-\mathbf{u}$ 再由 Proposition 3.2.5 (4) 知 $-\mathbf{u}=(-1)\mathbf{u}$. 因此由 $-1\in\mathbb{F}$ 以及係數積的封閉性知 $-\mathbf{u}\in W$. □

注意在這個證明裡, 我們僅利用係數積的封閉性證明 (3), (4) 成立, 不過在驗證 subspace 時一定還要驗證加法的封閉性, 否則無加法封閉性根本沒資格成為 vector space.

一個 vector space V 中有兩個 trivial subspace, 即 V 和 $\{\mathbf{0}\}$. 其中 $\{\mathbf{0}\}$ 稱為 *zero subspace* of V, 以後我們用 $\mathbf{O}$ 來表示. 例外要注意 subspace 不能是空集合, 又因為 $\mathbf{0}$ 一定在其中, 所以以後檢查 V 中的子集合是否為 subspace, 我們可以先檢查 $\mathbf{0}$ 是否在其中. 一來可以知道它是不是空集合, 而且若 $\mathbf{0}$ 不在其中就可以斷定它不是 subspace, 真是一舉兩得啊! 以下我們寫下一個檢查是否為 subspace 更簡明的方法.

Corollary 3.3.3. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W 為 V 的子集合. 則 W 為 V 的 *subspace* 若且唯若 $\mathbf{0}\in W$ 且對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$, $r\in\mathbb{R}$ 皆有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$.

Proof. $(\Rightarrow)$: 依 subspace 的定義, 加法及係數積皆有封閉性, 故對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$, $r\in\mathbb{F}$ 由係數積的封閉性得 $r\mathbf{v}\in W$ 再由加法封閉性得 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$. 又依定義 W 為非空集合, 故必存在一向量 $\mathbf{w}\in W$. 現考慮 $0\mathbf{w}$, 依封閉性 $0\mathbf{w}\in W$. 又因 V 為 vector space, 我們知 $0\mathbf{w}=\mathbf{0}$ (Proposition 3.2.5(2)). 故得證 $\mathbf{0}=0\mathbf{w}\in W$.

$(\Leftarrow)$: 由 $\mathbf{0}\in W$, 我們知 W 為 V 的非空子集合. 故由 Proposition 3.3.2, 我們僅要證明 W 有加法和係數積的封閉性. 我們要用對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$, $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W$ 這個假設證

明封閉性. 因 $1 \in \mathbb{F}$, 故對任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ 考慮 $r = 1$ 的情形可得 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$, 證得加法封閉性. 又若 $\mathbf{v} \in W$ 以及 $r \in \mathbb{F}$, 因為已知 $\mathbf{0} \in W$, 故考慮 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 的情形得證 $r\mathbf{v} = \mathbf{0} + r\mathbf{y} \in W$. $\square$

由 Corollary 3.3.2, 我們知道要檢查一個 vector space V 中的子集合 W 是否為 V 的 subspace, 我們僅要檢查

(1) $\mathbf{0} \in W$

(2) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $r \in \mathbb{F} \Rightarrow \mathbf{u} + r\mathbf{v} \in W$.

是否成立即可. 我們看以下的例子.

Example 3.3.4. (A) 考慮 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 即所有 entries 在 $\mathbb{F}$ 中的 $m \times n$ matrices 所成的 vector space. 所謂 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 *upper triangular* matrix 表示當 $i > j$ 時該矩陣第 (i, j)-th entry 為 0. 我們要證明 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 upper triangular matrix 所成的集合是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先觀察 $m \times n$ 階零矩陣, 由於其任意 entry 皆為 0, 當然 (i, j)-th entry 當 $i > j$ 時亦為 0, 因此零矩陣是 upper triangular. 現考慮 $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 皆為 upper triangular, 設 a_{ij}, b_{ij} 分別表示 A, B 的 (i, j)-th entry. 對任意 $r \in \mathbb{F}$, 我們有 $A + rB$ 的 (i, j)-th entry 為 $a_{ij} + rb_{ij}$. 現當 $i > j$ 時 $a_{ij} = b_{ij} = 0$, 故得 $a_{ij} + rb_{ij} = 0$. 證得 $A + rB$ 亦為 upper triangular. 因此得證 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 upper triangular matrix 所成的集合是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace.

(B) 考慮 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 即所有 entries 在 $\mathbb{F}$ 中的 $n \times n$ 方陣所成的 vector space. 我們想知道 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 symmetric matrices (對稱矩陣) 所成的集合是否為 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先回顧, 對一個 $m \times n$ matrix A, 我們定義 A 的 *transpose* 為一個 $n \times m$ matrix, 記為 A^{t}, 滿足對任意 $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, A^{t} 的 (i, j)-th entry 為 A 的 (j, i)-th entry. 利用矩陣加法及係數積運算, 我們很容易驗證對任意 $m \times n$ 矩陣 A, B 以及 $r \in \mathbb{F}$ 皆滿足 $(A + rB)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + (rB)^{\mathrm{t}} = A + rB$. 現回到對稱矩陣的定義, 對於 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 我們稱 A 為 symmetric matrix, 表示 $A^{\mathrm{t}} = A$. 很明顯的 $n \times n$ 階零矩陣 $\mathbf{0}$ 為 symmetric matrix. 而若 $A, B \in \mathscr{M}_{n\times n}$ 滿足 $A^{\mathrm{t}} = A, B^{\mathrm{t}} = B$, 則對任意 $r \in \mathbb{R}$, 利用 $A^{\mathrm{t}} = A, B^{\mathrm{t}} = B$, 我們有 $(A + rB)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + (rB)^{\mathrm{t}} = A + rB = A + rB$. 亦即 $A + rB$ 亦為 symmetric matrix, 得證 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 symmetric matrices 所成的集合為 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace.

$M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中所有的 invertible matrices (可逆矩陣) 所成的集合是否為 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace 呢? 答案是否定的. 很明顯的零矩陣 $\mathbf{0}$ 就不是 invertible, 所以由 $\mathbf{0}$ 不在其中就可得 $\mathscr{M}_{n\times n}$ 中所有的 invertible matrices 所成的集合不是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 其實即使我們考慮 invertible matrices 所成的集合與 $\{\mathbf{0}\}$ 的聯集, 仍不會是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的 subspace. 因為即使此時 $\mathbf{0}$ 在其中, 但仍有可能兩個 invertible matrices 相加後就不是 invertible. 例如在 2×2 的情形, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 皆為 invertible, 但是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 不是 invertible.

(C) 考慮 $P(\mathbb{F})$, 即所有以 $\mathbb{F}$ 的元素為係數的多項式所成的 vector space. 給定一自然數 $n \in \mathbb{N}$, 我們說明所有次數小於等於 n 的多項式所成的集合 $P_n(\mathbb{F})$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先我們可以將 $P_n(\mathbb{F})$ 寫成 $P_n(\mathbb{F}) = \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{F}\}$. 很明顯的零多項式屬於 $P_n(\mathbb{R})$ (注意一般數學上定義零多項式的次數為 $-\infty$, 而不是 0. 這個部分以後代數課程會去談

論, 這裡就不多談). 又若 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i\in P_n(\mathbb{R})$, 則對任意 $r\in\mathbb{R}$, 我們有 $f(x)+rg(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+rb_i)x^i\in P_n(\mathbb{R})$. 故知 $P_n(\mathbb{F})$ 為 $P(\mathbb{F})$ 的 subspace. 要注意, 若僅考慮次數等於 n 的多項式所成的集合, 那麼就不會是 $P(\mathbb{F})$ 的 subspace 了. 很明顯的零多項式就不會在裡面. 又即使加入零多項式, 但仍有可能兩個次數為 n 的多項式相加之後其次數變小了, 例如 $(x^2+x+1)+(-x^2+x+1)=2x+2$. 也就是說在這情況之下加法是不封閉的, 所以無法成為一個 vector space.

(D) 對一非空集合 S 以及 field $\mathbb{F}$, 考慮 $F(S,\mathbb{F})$ 為所有從 S 映射到 $\mathbb{F}$ 的函數所成的 vector space. 現假設 T 是 S 的一個非空子集合, 考慮 $N_T=\{f\in F(S,\mathbb{F}): f(t)=0,\forall t\in T\}$, 亦即 N_T 為 S 到 $\mathbb{F}$ 的函數, 但將 T 中的元素都映射到 0. 我們要說明 N_T 是 $F(S,\mathbb{F})$ 的 subspace. 首先 $F(S,\mathbb{F})$ 中的 zero vector $\mathbf{0}$ 就是零函數, 也就是把 S 中的元素都映射到 0 的函數. 現由於 $T\subseteq S$, 所以此零函數當然把 T 中的元素都映射到 0. 得證 $\mathbf{0}\in N_T$. 現若 $f,g\in N_T$ 且 $r\in\mathbb{F}$. 依定義 $(f+rg)(s)=f(s)+rg(s), \forall s\in S$, 故由 $f,g\in N_T$ 的假設知對任意 $t\in T$, $(f+rg)(t)=f(t)+rg(t)=0+0=0$, 得證 $f+rg\in N_T$, 也因此證明了 N_T 是 $F(S,\mathbb{F})$ 的 subspace.

Question 3.5. 在 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 這個 *vector space* 中, 考慮在固定的特定位置 (例如對角線位置) 為 0 的矩陣所成的集合, (例如對角線位置皆為 0 的矩陣所成的集合). 試問這樣的集合是否為 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 *subspace?* 又若考慮在固定的特定位置皆不是 0 的矩陣所成的集合, 是否為 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 *subspace?*

Subspace 是 vector space 中特殊的子集合, 所以我們當然希望能利用已知的 subspace "製造" 出新的 subspace. 這裡我們介紹兩種常見的方法.

Proposition 3.3.5. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W_1,W_2 為 V 的 *subspace,* 則 $W_1\cap W_2$ 亦為 V 的 *subspace.*

Proof. 首先 W_1,W_2 為 subspace, 故 $\mathbf{0}\in W_1$ 且 $\mathbf{0}\in W_2$, 故得 $\mathbf{0}\in W_1\cap W_2$. 現若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W_1\cap W_2$ 且 $r\in\mathbb{F}$, 由於 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 皆屬於 W_1 且 W_1 是 subspace, 故知 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W_1$, 同理可得 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W_2$, 故得證 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in W_1\cap W_2$. □

Question 3.6. 證明任意多個 V 的 *subspace* 的交集依然是 V 的 *subspace.* (注意不要用數學歸納法, 數學歸納法僅能證明有限多個的情況)

雖然兩個 subspaces 的交集仍為 subspace, 但他們的聯集就未必是 subspace 了. 當然了, 當 W_1,W_2 為 V 的 subspace, 若 $W_1\subseteq W_2$, 則 $W_1\cup W_2=W_2$ 當然就是 V 的 subspace. 同樣的, 若 $W_2\subseteq W_1$, 則 $W_1\cup W_2=W_1$ 當然也是 V 的 subspace. 下一個定理就是告訴我們, 除了這兩個明顯的情況外, 兩個 subspaces 的聯集不會是 subspace.

Proposition 3.3.6. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W_1,W_2 為 V 的 *subspace.* 若 $W_1\not\subseteq W_2$ 且 $W_2\not\subseteq W_1$, 則 $W_1\cup W_2$ 不是 V 的 *subspace.*

Proof. 依假設 $W_1\not\subseteq W_2$ 表示存在一個元素在 W_1 中但不在 W_2, 我們假設 $\mathbf{w}_1\in W_1$ 但 $\mathbf{w}_1\not\in W_2$, 同理由 $W_2\not\subseteq W_1$, 我們假設 $\mathbf{w}_2\in W_2$ 但 $\mathbf{w}_2\not\in W_1$. 當然了, 依定義我們有 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in W_1\cup W_2$, 我

們要利用 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 這兩個 $W_1 \cup W_2$ 中的元素說明 $W_1 \cup W_2$ 在加法之下沒有封閉性, 因此得證 $W_1 \cup W_2$ 不是 V 的 subspace.

我們用反證法，假設 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1 \cup W_2$. 這表示 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1$ 或 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_2$. 若 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1$, 由 $\mathbf{w}_1 \in W_1$ 以及 W_1 為 vector space, 得 $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) - \mathbf{w}_1 \in W_1$. 此與 $\mathbf{w}_2 \notin W_2$ 相矛盾. 同理若 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_2$, 我們也會推得 $\mathbf{w}_1 \in W_2$ 的矛盾. 因此知 $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \notin W_1 \cup W_2$, 得證 $W_1 \cup W_2$ 不是 V 的 subspace. $\square$

從 Proposition 3.3.6 的證明中, 我們發現 $W_1 \cup W_2$ 不是 vector space 最主要的原因是沒有加法封閉性 (它有係數積的封閉性), 我們可以考慮以下的集合故意收集加法所得的元素讓它有加法封閉性.

Definition 3.3.7. 假設 V 為 vector space W_1, W_2 為其 subspace, 定義集合

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$$

並稱之為 the *sum* of W_1 and W_2.

對任意 $\mathbf{w}_1 \in W_1$, 由於 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{0}$, 且 $\mathbf{0} \in W_2$ (因 W_2 為 subspace), 我們有 $\mathbf{w}_1 \in W_1 + W_2$, 亦即 $W_1 \subseteq W_1 + W_2$. 同理可得 $W_2 \subseteq W_1 + W_2$. 以下定理告訴我們 $W_1 + W_2$ 也會是 V 的 subspace, 事實上它是包含 W_1 和 W_2 最小的 subspace.

Proposition 3.3.8. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 W_1, W_2 為 V 的 *subspace,* 則 $W_1 + W_2$ 也是 V 的 *subspace.* 特別若 W 是 V 的 *subspace* 且滿足 $W_1 \subseteq W$ 以及 $W_2 \subseteq W$, 則 $W_1 + W_2 \subseteq W$.

Proof. 首先因 $\mathbf{0} \in W_1$ 且 $\mathbf{0} \in W_2$, 故由 $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ 可得 $\mathbf{0} \in W_1 + W_2$. 現若 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ 且 $r \in \mathbb{F}$, 此時由 $\mathbf{u} \in W_1 + W_2$, 知存在 $\mathbf{u}_1 \in W_1$ 以及 $\mathbf{u}_2 \in W_2$ 使得 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, 同理存在 $\mathbf{v}_1 \in W_1$ 以及 $\mathbf{v}_2 \in W_2$ 使得 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. 因此 $\mathbf{u} + r\mathbf{v} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + r(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + r\mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + r\mathbf{v}_2)$. 然而 W_1 是 subspace, 由 $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in W_1$ 以及 $r \in \mathbb{F}$ 知 $\mathbf{u}_1 + r\mathbf{v}_1 \in W_1$. 同理知 $\mathbf{u}_2 + r\mathbf{v}_2 \in W_2$, 故得 $W_1 + W_2$ 是 V 的 subspace.

現對任意 $\mathbf{u} \in W_1 + W_2$, 因為存在 $\mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2$ 滿足 $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, 故由 $W_1 \subseteq W$ 以及 $W_2 \subseteq W$ 知 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, 因此由 W 是 subspace 知 $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$, 得證 $W_1 + W_2 \subseteq W$. $\square$

Question 3.7. 假設 $n \geq 3$, $W_1, W_2, \ldots, W_n$ 皆為 *vector space* V 的 *subspaces.* 學習 *Definition 3.3.7* 的定義方法, 你覺得要如何定義 $W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ 才能讓它為包含 $W_1, W_2, \ldots, W_n$ 最小的 *subspace* 呢?

3.4. Linear Combination and Span of Vectors

在這一節中, 我們將介紹線性組合的概念.

當 V 是 vector space over $\mathbb{F}$, 要如何得到 V 的 subspace 呢? 我們可以在 V 中先找到一個 $\mathbf{v} \in V$ 然後找包含 $\mathbf{v}$ 的集合使其為包含 $\mathbf{v}$ 最小的 subspace. 首先這個集合必須包含所有 $\mathbb{F}$ 中的元素與 $\mathbf{v}$ 的係數積, 如此方可保證係數積的封閉性. 所以我們考慮集合 $\{r\mathbf{v} \mid r \in \mathbb{F}\}$. 這個集合不只對 $\mathbb{F}$ 的係數積有封閉性, 而且有加法的封閉性, 事實上它就是

包含 $\mathbf{v}$ 最小的 subspace 了. 我們用 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 來表示它, 意即 $\mathbf{v}$ 所 *span* (展成) 的向量空間. 我們來驗證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 確為 V 的 subspace. 首先由於 $\mathbf{0}=0\mathbf{v}$, 所以的確有 $\mathbf{0}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v})$. 接著, 若 $\mathbf{u},\mathbf{w}\in\mathrm{Span}(V)$, 表示存在 $s,t\in\mathbb{F}$ 滿足 $\mathbf{u}=s\mathbf{v}$ 且 $\mathbf{w}=t\mathbf{v}$, 因此對任意 $r\in\mathbb{F}$, 我們有 $\mathbf{u}+r\mathbf{w}=(s\mathbf{v})+r(t\mathbf{v})=(s+rt)\mathbf{v}$. 由於 $s+rt\in\mathbb{F}$, 我們有 $(s+rt)\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v})$, 亦即 $\mathbf{u}+r\mathbf{w}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v})$. 得證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 為 V 的 subspace.

現若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, 既然 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}),\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 為 V 的 subspace, 由上一節 subspace 的 sum 的概念, 我們知 $\mathrm{Span}(\mathbf{u})+\mathrm{Span}(\mathbf{v})$ 亦為 V 的 subspace. 依定義

$$\mathrm{Span}(\mathbf{u})+\mathrm{Span}(\mathbf{v})=\{r\mathbf{u}+s\mathbf{v}\mid r,s\in\mathbb{F}\}.$$

由於它是包含 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 最小的 subspace, 我們視之為由 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所展成的 subspace, 故一般用 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 來表示. 而 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 中的元素, $r\mathbf{u}+s\mathbf{v}$ 就稱之為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 的 *linear combination* (線性組合). 這個概念可以推廣到一般有限多個向量的情況, 我們有以下的定義.

Definition 3.4.1. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$, 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in V$. 對於任意 $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}$, 我們稱 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 為 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的 *linear combination*. 所有 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的 linear combination 所成的集合, 我們用 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 來表示, 亦即

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)=\{\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{v}_i\mid c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}\}.$$

我們可以直接驗證 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 會是 V 的 subspace (或是利用 sum 的概念, 參見 Question 3.7). 事實上它是包含 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 最小的 subspace. 這是因為若 W 是 V 的 subspace 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in W$, 則由 W 的加法與係數積的封閉性得 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)\subseteq W$.

其實我們不只談論有限多個 V 中的向量所展成的 subspace, 我們也可談論 V 中任意的非空子集合所展成的 subspace. 不過這裡要注意的是, 我們每次只能處理有限多個向量的加法, 所以線性組合也僅能是有限多個向量的線性組合. 因此當 V 中的子集合 S 有無窮多個元素時, S 的 span 是由 S 中有限多個向量的線性組合所組成的. 我們有以下的定義.

Definition 3.4.2. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 S 是 V 的非空子集. 則定義

$$\mathrm{Span}(S)=\{\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{v}_i\mid n\in\mathbb{N},\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in S,c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}\}.$$

要提醒大家注意, 在 Definition 3.4.1 中 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 的定義, 由於涉及 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 這 n 個給定的向量, 所以在此我們用集合表示法說明 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)$ 的元素時不必提及 n 和 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是什麼. 然而在 Definition 3.4.2 中當我們用集合表示法說明 $\mathrm{Span}(S)$ 的元素時, 我們是在 S 中任選 n 個元素 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$, 這 n 和 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是變動的, 所以必須寫下表示 n 是任意可能的正整數, 而 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是 S 中任意可能的向量.

事實上 $\mathrm{Span}(S)$ 也會是 V 的 subspace. 首先 S 不是空集合, 所以存在 $\mathbf{v}\in S$, 此時考慮 $0\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 由 $\mathrm{Span}(S)$ 的定義 (取 $n=1$, $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}$, $c_1=0$), 知 $\mathbf{0}\in\mathrm{Span}(S)$. 現若 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(S)$ 且 $r\in\mathbb{F}$, 則由於 $\mathbf{u}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_n\mathbf{u}_n$, 其中 $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\in S$ 且 $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{v}=c'_1\mathbf{v}_1+\cdots+c'_m\mathbf{v}_m$, 其中 $m\in\mathbb{N}$, $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\in S$ 且 $c'_1,\dots,c'_m\in\mathbb{F}$, 我們有

$$\mathbf{u}+r\mathbf{v}=c_1\mathbf{u}_1+\cdots+c_n\mathbf{u}_n+rc'_1\mathbf{v}_1+\cdots+rc'_m\mathbf{v}_m,$$

仍符合 $\mathrm{Span}(S)$ 中元素之定義, 故知 $\mathbf{u}+r\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(S)$ 得證 $\mathrm{Span}(S)$ 為 V 的 subspace.

在我們寫下一些向量的線性組合時, 前面乘的係數若是 0, 通常我們的省略不寫. 例如 $2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2+0\mathbf{v}_3$ 是 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的一個線性組合, 不過我們通常寫成 $2\mathbf{v}_1+3\mathbf{v}_2$. 基於這個原因再加上我們希望任何集合的 span 皆為 vector space, 因此當 S 是空集合 (用 $\emptyset$ 表示), 我們定義 $\mathrm{Span}(S)=\mathrm{Span}(\emptyset)=\{\mathbf{0}\}$ 這一個 zero subspace.

給定一個 vector space V, 若能找到一個 subset S 使得 $\mathrm{Span}(S)=V$, 這當然很好, 表示我們可以用較小的集合 S 就能描述 V. 特別的, 若 S 是有限個元素的集合那就更好, 表示僅需有限多個元素就能 "掌握" V 中所有的元素.

Definition 3.4.3. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $S\subseteq V$. 若 $\mathrm{Span}(S)=V$, 則稱 S 為 V 的一組 *spanning set*. 此時我們說 S generates (或 spans V). 特別的, 若能找到 finite set (即僅有有限個元素的集合) S 滿足 $\mathrm{Span}(S)=V$, 此時我們稱 V 為 *finitely generated vector space*.

為何特別稱之為 finitely generated vector space 呢? 這表示此 vector space 中所有的元素都可表示成固定有限多個元素的線性組合. 一般的 vector space, 有可能不是 finitely generated, 所以要區分出來, 我們看以下的例子.

Example 3.4.4. 我們討論前面提的一些 vector space 哪些是 finitely generated vector space.

(A) $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是 finitely generated. 因為考慮 $E_{ij}\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 表示 (i,j)-th entry 為 1, 其他 entry 為 0 的 $m\times n$ matrix. 很容易看出所有的 $m\times n$ matrix 皆可寫成 E_{ij} 其中 $1\le i\le m$, $1\le j\le n$ 的 linear combination. 所以 $\{E_{ij}\mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$ 是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 spanning set, 也因此 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是 finitely generated vector space.

(B) $P(\mathbb{F})$ 不是 finitely generated vector space. 這是因為如果 $\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ 為 $P(\mathbb{F})$ 的 spanning set, 假設 $f_1(x),\dots,f_n(x)$ 的最高次為 m, 則任何 $f_1(x),\dots,f_n(x)$ 的 linear combination $c_1f_1(x)+\cdots+c_nf_n(x)$ 的次數皆不可能大於 m. 也就是說 $\mathrm{Span}(f_1(x),\dots,f_n(x))$ 不可能包含次數大於 m 的多項式. 此與 $\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}$ 為 $P(\mathbb{F})$ 的 spanning set 明顯不合, 故知 $P(\mathbb{R})$ 不可能是 finitely generated. 不過次數小於等於 n 的多項式所成的集合 $P_n(\mathbb{F})$ 就是 finitely generated vector space. 很容易看出 $\{x^n,\dots,x,1\}$ 就是 $P_n(\mathbb{F})$ 的 spanning set.

大家或許直覺會認為 finite generated vector space 的 subspace 一定也是 finitely generated. 這是對的, 不過證明卻不是如直覺那麼簡單 (大家不妨現在試著證明看看). 它的證明等到介紹完 linearly independence 的概念, 我們就可以處理.

談到 $\mathrm{Span}(S)$, 我們自然會需要探討那些元素會是 $\mathrm{Span}(S)$ 的元素. 我們看以下的例子.

Example 3.4.5. 在 $P_3(\mathbb{R})$ 中考慮 $\mathbf{u}=x^3-2x^2-5x-3$ and $\mathbf{v}=3x^3-5x^2-4x-9$. 我們要檢查 $2x^3-2x^2+12x-6$ 和 $3x^3-2x^2+7x+8$ 是否屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. 首先檢查是否存在 $a,b\in\mathbb{R}$ 使得 $2x^3-2x^2+12x-6=a\mathbf{u}+b\mathbf{v}=a(x^3-2x^2-5x-3)+b(3x^3-5x^2-4x-9)$ 比較係數後我

們發現 a,b 需滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a+3b &= 2 \\ -2a-5b &= -2 \\ -5a-4b &= 12 \\ -3a-9b &= -6 \end{cases}$$

利用上一章解聯立方程組的方法, 我們解得 $a=-4, b=2$, 因此得到 $2x^3-2x^2+12x-6 \in \mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. 同樣的我們要檢查是否存在 $a,b \in \mathbb{R}$ 使得 $3x^3-2x^2+7x+8 = a\mathbf{u}+b\mathbf{v} = a(x^3-2x^2-5x-3)+b(3x^3-5x^2-4x-9)$ 比較係數後我們發現 a,b 需滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a+3b &= 3 \\ -2a-5b &= -2 \\ -5a-4b &= 7 \\ -3a-9b &= 8 \end{cases}$$

結果發現此聯立方程組無解, 因此知 $3x^3-2x^2+7x+8 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$.

我們可以討論更一般的情形, 即探討何時 $f(x)=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$ 會屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. 依定義, 這表示存在 $a,b \in \mathbb{R}$ 使得 $c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4 = a(x^3-2x^2-5x-3)+b(3x^3-5x^2-4x-9)$ 比較係數後我們發現 a,b 需滿足聯立方程組

$$\begin{cases} a+3b &= c_1 \\ -2a-5b &= c_2 \\ -5a-4b &= c_3 \\ -3a-9b &= c_4 \end{cases}$$

利用 elementary row operation 我們將 augmented matrix

$$\left[\begin{array}{rr|l} 1 & 3 & c_1 \\ -2 & -5 & c_2 \\ -5 & -4 & c_3 \\ -3 & -9 & c_4 \end{array}\right].$$

轉換得 reduced echelon form

$$\left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & -5c_1-3c_2 \\ 0 & 1 & 2c_1+c_2 \\ 0 & 0 & -17c_1-11c_2+c_3 \\ 0 & 0 & 3c_1+c_4 \end{array}\right].$$

這告訴我們此聯立方程組有解若且唯若 $-17c_1-11c_2+c_3=0$ 且 $3c_1+c_4=0$ 且有解時其解為 $a=-5c_1-3c_2, b=2c_1+c_2$. 也就是說當 $-17c_1-11c_2+c_3=0$ 且 $3c_1+c_4=0$ 時, 多項式 $f(x)=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$ 會屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 且此時 $f(x)=(-5c_1-3c_2)\mathbf{u}+(2c_1+c_2)\mathbf{v}$.

在這一節最後, 我們列下一些有關 $\mathrm{Span}(S)$ 的性質.

Lemma 3.4.6. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $S \subseteq V$, 則 $\mathrm{Span}(S)$ 是 V 中包含 S 最小的 *subspace*. 換句話說, 若 W 是 V 的 *subspace* 且 $S \subseteq W$, 則 $\mathrm{Span}(S) \subseteq W$.

Proof. 依定義 $S \subseteq \mathrm{Span}(S)$ 且我們已知 $\mathrm{Span}(S)$ 是 V 的 subspace. 現假設 W 是 V 的 subspace 且 $S \subseteq W$, 我們要說明 $\mathrm{Span}(S) \subseteq W$. 對任意 $\mathbf{v} \in \mathrm{Span}(S)$, 我們知存在 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n \in S$ 以及 $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}=\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i$. 現因 $S \subseteq W$, 我們有 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n \in W$, 故由 W 是 subspace, 得證 $\mathbf{v}=\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{v}_i \in W$. □

利用 Lemma 3.4.6, 我們馬上可知若 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$. 這當然可直接用定義來證明, 不過利用 Lemma 3.4.6, 我們就可以直接套用, 而省去許多繁瑣的論證. 這是因為 $\mathrm{Span}(S_2)$ 是 V 的 subspace 又 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$, 故套用 Lemma 3.4.6 (考慮 $S = S_1$, $W = \mathrm{Span}(S_2)$ 的情形) 得證 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$. 利用這個概念我們也可以很快的處理 Span 對兩集合交集及聯集的影響.

當 S_1, S_2 是 V 的 subsets, 我們可以考慮 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2)$ 和 $\mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$ 的關係. 由於 $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$, 我們有 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1)$. 同理 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$. 由於 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2)$ 同時包含於 $\mathrm{Span}(S_1)$ 和 $\mathrm{Span}(S_2)$ 可推得 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$. 不過反向 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \supseteq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$ 就不一定成立, 主要原因是取集合的交集遠比 Span 後再取交集小的多. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 上考慮 $S_1 = \{(1,1)\}$, $S_2 = \{(2,2)\}$. 我們有 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ 所以 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) = \mathrm{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$; 不過 $\mathrm{Span}(S_1) = \{(r,r) \mid r \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}(S_2)$, 所以 $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) = \{\mathbf{0}\} \subsetneq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$.

接下來我們看聯集的情況. 因為 $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2$ 且 $S_2 \subseteq S_1 \cup S_2$, 我們有 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 以及 $\mathrm{Span}(S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$, 所以當然 $\mathrm{Span}(S_1) \cup \mathrm{Span}(S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$. 不過 $\mathrm{Span}(S_1) \cup \mathrm{Span}(S_2)$ 比起 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 太小了, 事實上我們知道 $\mathrm{Span}(S_1) \cup \mathrm{Span}(S_2)$ 在大多數的情況甚至不是 subspace (Proposition 3.3.6). 不過 Proposition 3.3.8 告訴我們 $\mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$ 是包含 $\mathrm{Span}(S_1)$ 和 $\mathrm{Span}(S_2)$ 最小的 subspace, 因此由 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 包含 $\mathrm{Span}(S_1)$ 和 $\mathrm{Span}(S_2)$ 且是 subspace 得 $\mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$. 另一方面 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2)$ 是包含 $S_1 \cup S_2$ 最小的 subspace, 然而 $S_1 \subseteq \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$ 且 $S_2 \subseteq \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$, 再加上 $\mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$ 是 subspace, 所以我們也有 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$. 因此證得 $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$. 我們總結以上的結果如下.

Proposition 3.4.7. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 S_1, S_2 皆為 V 的 *subsets.*

(1) 若 $S_1 \subseteq S_2$, 則 $\mathrm{Span}(S_1) \subseteq \mathrm{Span}(S_2)$.

(2) $\mathrm{Span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \mathrm{Span}(S_1) \cap \mathrm{Span}(S_2)$.

(3) $\mathrm{Span}(S_1 \cup S_2) = \mathrm{Span}(S_1) + \mathrm{Span}(S_2)$.