3.5. Linearly Dependence and Independence

Spanning set 的概念是處理 linear combination 的存在性, 也就是了解一個向量可不可以寫成一些特定向量的線性組合; 而 linear independence 的概念便是處理 linear combination 的唯一性, 也就是說寫成線性組合的方法是否唯一. 這一節中便是探討 linearly independent 的概念.

考慮 over $\mathbb{F}$ 的 vector space V. 若 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3 \in V$, 我們知道 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ 為 V 中包含 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 以及 $\mathbf{v}_3$ 最小的 subspace. 這個 subspace 很容易掌握, 因為每個元素都是 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 的線性組合, 我們只要了解 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 就可以瞭解這個 subspace. 當然了, 若能用較少的元素就能掌握整個 subspace 就更好, 所以我們自然會問這裡 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 有沒有多餘, 不必要的呢? 這是有可能的, 例如若 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$, 則 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$. 所以此時僅要了解 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 就夠了. 當 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 表示存在 $r_1,r_2 \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}_3 = r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2$, 此時表示 $\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$, 是有關係的, 我們稱 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 是 *linearly dependent* (線性相依或線性相關). 不過要注意 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 並不表示 $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$. 我們看以下的例子.

Example 3.5.1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中考慮 $\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (2,2)$. 我們有 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$, 因為 $\mathbf{v}_3 = (2,2) = 0(1,0) + 2(1,1) = 0\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$. 不過 $\mathbf{v}_1 \not\in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, 因為 $(1,0)$ 無法寫成 $(1,1)$ 和 $(2,2)$ 的線性組合.

因此當我們要檢查 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 之間是否有線性關係, 不能只檢查是否 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 還要檢查是否 $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ 以及 $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)$. 不過分開檢查這三種情況有點麻煩. 我們再深入看一下這三種情況代表甚麼. 當 $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, 表示存在 $r,s \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}_1 = r\mathbf{v}_2 + s\mathbf{v}_3$, 也就是說 $1\mathbf{v}_1 + (-r)\mathbf{v}_2 + (-s)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. 同理, $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)$ 和 $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 分別表示存在 $r',s' \in \mathbb{F}$ 和 $r'',s'' \in \mathbb{F}$ 分別使得 $\mathbf{v}_2 = r'\mathbf{v}_1 + s'\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{v}_3 = r''\mathbf{v}_1 + s''\mathbf{v}_2$. 也就是說當 (1) $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$, (2) $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3)$ 或 (3) $\mathbf{v}_3 \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ 其中有一個發生時, 我們會有相對應的

$$\begin{array}{rcrcrcll} 1\mathbf{v}_1 & + & (-r)\mathbf{v}_2 & + & (-s)\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{0} & \quad (1) \\ (-r')\mathbf{v}_1 & + & 1\mathbf{v}_2 & + & (-s')\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{0} & \quad (2) \\ (-r'')\mathbf{v}_1 & + & (-s'')\mathbf{v}_2 & + & 1\mathbf{v}_3 & = & \mathbf{0} & \quad (3) \end{array}$$

這三種可能的情況發生, 其中 $r,s,r',s',r'',s'' \in \mathbb{F}$. 不過不管 (1), (2), (3) 哪一種情況發生, 總有一個 $\mathbf{v}_i$ 其前面的係數是 1, 不為 0. 也就是說我們可找到不全為 0 的 c_1,c_2,c_3 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. 反之若能找到 c_1,c_2,c_3 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, 我們就可將前面係數 c_i 不等於 0 的 $\mathbf{v}_i$ 寫成另兩個向量的線性組合. 例如若 $c_1 \neq 0$, 則可得 $\mathbf{v}_1 = (-c_1'c_2)\mathbf{v}_2 + (-c_1'c_3)\mathbf{v}_3$, 其中 c_1' 為 c_1 的乘法反元素 (因 $c_1 \neq 0$). 由此可知, 存在 c_1,c_2,c_3 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ 和前面所提 (1), (2), (3) 三種情況是等價的, 因此我們用此方法來定義 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 linearly dependent.

讓我們把以上概念推廣到任意多個向量的情況. 我們稱一組向量為 linearly dependent, 指的是這一組向量之間有關係, 也就是說其中有一個向量是其他向量的線性組合. 例如假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 就表示其中有一個 $\mathbf{v}_i$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合. 每次要提有一個 $\mathbf{v}_i$ 是其他向量的線性組合有點麻煩. 不過若我們更進一步觀察, 此

時 $\mathbf{v}_i = r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + r_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} + \cdots + r_n\mathbf{v}_n$, 其中這些 r_j 皆為實數. 所以我們得

$$r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + (-1)\mathbf{v}_i + r_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} + \cdots + r_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

也就是說我們找到一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. 反之, 若存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. 我們假設 $c_i \neq 0$, 此時令 c_i' 為 c_i 的乘法反元素 (即 $c_i c_i' = 1$), 可得

$$\mathbf{v}_i = (-c_1c_i')\mathbf{v}_1 + \cdots + (-c_{i-1}c_i')\mathbf{v}_{i-1} + (-c_{i+1}c_i')\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + (-c_nc_i')\mathbf{v}_n,$$

也就是說 $\mathbf{v}_i$ 可以寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{i-1},\mathbf{v}_{i+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 的線性組合. 由此可知, 存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ 就等同於 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 這一組向量之間有關係. 由於這個方式來表達線性相關不必敘述其中哪一個向量是其他向量的線性組合, 較為簡潔. 一般就以這個方式來定義線性相關.

Definition 3.5.2. 假設 V 是一個 vector space over $\mathbb{F}$, 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$, 若存在一組不全為 0 的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

則稱 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent* (線性相依或線性相關). 反之, 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 不是 linearly dependent, 則稱為 *linearly independent* (線性獨立).

這個定義可以推廣到 V 的任意子集合. 若 $S \subseteq V$, 且 S 中存在相異 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in S$ 使得 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 則稱集合 S 為 linearly dependent; 反之, 若 S 不是 linearly dependent, 表示任意的一組相異向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in S$ 皆為 linearly independent, 則稱 S 為 linearly independent. 在此定義之下空集合 $\emptyset$ 是 linearly independent, 因為我們無法在 $\emptyset$ 中找到任何 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 linearly dependent. 另一方面, 若 $\mathbf{0} \in S$, 則 S 一定是 linearly dependent. 因為 $\mathbf{0}$ 本身一個元素就是 linearly dependent. 原因是 $1\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 所以我們找到一個係數不為 0 的 $\mathbf{0}$ 的線性組合. 因此依定義 S 為 linearly dependent.

一般來說, 除了上述 $S = \emptyset$ 和 $\mathbf{0} \in S$ 這兩種情況外, 要說明 S 是否為 linearly independent 並不是馬上能看出來的. 通常當我們要證明一組向量 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 我們有以下兩個方法: 第一個方法就是先設 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, 再證明此時 $c_1,\ldots,c_n$ 必全為 0. 第二種方法, 就是所謂的反證法, 亦即先假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent (也就是說假設存在不全為 0 的 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$), 再推得矛盾. 第一個方法通常在有具體的向量時使用, 而處理抽象的情形大多使用第二種方法, 如下面的例子.

Example 3.5.3. 假設 V 為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$ 為 linearly independent. 這表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 之間沒有線性關係. 因此可以理解若我們在 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 中移除 $\mathbf{v}_n$, 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}$ 這一組向量應仍為 linearly independent. 要證明這一個事實, 若我們用第一個方法, 很難由 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}$ 推得 $c_1,\ldots,c_{n-1}$ 必全為 0. 然而若利用第二個方法, 即假設存在不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_{n-1}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}$. 此時令 $c_n = 0$, 我們得到一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n$ 使得

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} + c_n\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}.$$

此與 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ 為 linearly independent 的假設相矛盾, 故得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1}$ 為 linearly independent. 大家應可以看出, 我們其實是證明了當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ 為 linearly dependent 時, 加入任意的 $\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ 後, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{v}_n$ 也是 linearly dependent.

Question 3.8. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $S \subseteq S' \subseteq V$. 試說明以下的對錯.

(1) 若 S 為 *linearly independent,* 則 S' 為 *linearly independent.*

(2) 若 S 為 *linearly dependent,* 則 S' 為 *linearly dependent.*

(3) 若 S' 為 *linearly independent,* 則 S 為 *linearly independent.*

(4) 若 S' 為 *linearly dependent,* 則 S 為 *linearly dependent.*

在 Example 3.5.3 中, 我們知道當 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$ 這一組向量為 linearly independent 時, 在這一組向量中移除一些向量, 仍不會改變其 linearly independent 的性質. 但若加入新的向量情況可能改變. 下一個定理就是告訴我們何時加入新的向量仍會保持 linearly independent.

Lemma 3.5.4. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1} \in V$. 若已知 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent,* 則 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 *linearly independent* 若且唯若 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$.

Proof. 如果 $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 之間有線性關係, 即為 linearly dependent. 故知若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent, 不可能會有 $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 的情形發生. 得證 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$.

反之, 假設 $\mathbf{v}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 我們要證明 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent. 利用反證法, 即設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly dependent, 也就是說存在一組不全為 0 的實數 $c_1,\ldots,c_n,c_{n+1}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=\mathbf{0}$. 我們知此時 c_{n+1} 必為 0, 否則由 $c_{n+1}\neq 0$ 知存在 $c'_{n+1} \in \mathbb{F}$ 使得 $c_{n+1}c'_{n+1}=1$ 此時

$$\mathbf{v}_{n+1} = (-c_1c'_{n+1})\mathbf{v}_1+\cdots+(-c_nc'_{n+1})\mathbf{v}_n,$$

會得到 $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 之矛盾. 因此由 $c_{n+1}=0$, 得 $c_1,\ldots,c_n$ 不全為 0 且使得

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0},$$

亦即 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent. 這和已知的假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent 相矛盾, 故得證 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}$ 為 linearly independent. □

我們常常看到一個 vector space 中, 若一個集合中向量的個數太多時, 就不會是 linearly independent 了. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中任意 3 個向量 $\mathbf{v}_1=(a_1,b_1),\mathbf{v}_2=(a_2,b_2),\mathbf{v}_3=(a_3,b_3)$ 就一定會 linearly dependent. 這事實的原因便是我們要找到 $c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}$ 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$, 就等同於解

$$x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3 = x_1(a_1,b_1)+x_2(a_2,b_2)+x_3(a_3,b_3)=(0,0),$$

亦即解聯立方程組

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 &= 0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3 &= 0 \end{cases}$$

這是有三個未知數 x_1,x_2,x_3 但僅有兩個方程式的齊次聯立方程組, 我們知道一定有無窮多解, 也就是說存在 $c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}$ 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+c_3\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$. 因此 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 一定是 linearly dependent. 我們可以利用這個概念證明以下著個重要的定理.

Lemma 3.5.5. 設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$. 若 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 且 $m>n$, 則 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ 為 *linearly dependent.*

Proof. 由於 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 因此對任意 $j=1,\ldots,m$, $\mathbf{w}_j$ 都可以寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的 linear combination. 也就是說, 存在 $a_{1,j},\ldots,a_{i,j},\ldots,a_{n,j} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w}_j = a_{1,j}\mathbf{v}_1+\cdots+a_{i,j}\mathbf{v}_i+\cdots+a_{n,j}\mathbf{v}_n.$$

現在我們要找到 $c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{R}$ 不全為 0 使得 $c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_m\mathbf{w}_m=\mathbf{0}$, 便證得 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ 為 linearly dependent. 現將 $c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_m\mathbf{w}_m$ 中每一個 $\mathbf{w}_j$ 換成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的 linear combination 後會等於

$$(c_1a_{1,1}+\cdots+c_ma_{1,m})\mathbf{v}_1+\cdots+(c_1a_{i,1}+\cdots+c_ma_{i,m})\mathbf{v}_i+\cdots+(c_1a_{m,1}+\cdots+c_ma_{m,m})\mathbf{v}_m. \quad (3.1)$$

因此若我們能找到 $c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{F}$ 使得式子 (3.1) 中每個 $\mathbf{v}_i$ 的係數等於 0, 便可得到 $c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_m\mathbf{w}_m=\mathbf{0}$. 因此我們只要找到聯立方程組

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,m}x_m &= 0 \\ \qquad\vdots & \\ a_{i,1}x_1+\cdots+a_{i,m}x_m &= 0 \\ \qquad\vdots & \\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,m}x_m &= 0 \end{cases}$$

的一組解 $x_1=c_1,\ldots,x_m=c_m$, 就可以使得 $c_1\mathbf{w}_1+\cdots+c_m\mathbf{w}_m=\mathbf{0}$. 然而這個 homogeneous linear system 的方程式個數 n 少於未知數個數 m. 也就是說將它對應的矩陣化為 echelon form 時, 其 pivot 的個數 (小於等於 n) 必少於 variables 的個數 m, 也就是存在著 free variables, 因此由此方程組有 $x_1=\cdots=x_n=0$ 這一組解知此方程組有其他解 (參考 Lemma 1.3.4), 即存在不全為 0 的 $c_1,\ldots,c_m \in \mathbb{F}$ 使得 $x_1=c_1,\ldots,x_m=c_m$ 為其一組解. 故得證 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ 為 linearly dependent. □

Question 3.9. 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent.* 若 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 且 $k<n$, 試證明 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k) \neq \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$.

假設 W 為 V 的 subspace, 且 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n \in W$ 為 linearly independent. 如果 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n$ 不是 W 的 spanning vectors (即 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n) \subsetneq W$), 則我們可以在 W 中選取 $\mathbf{w}_{n+1}$ 滿足 $\mathbf{w}_{n+1} \notin \mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n)$. 此時 Lemma 3.5.4 告訴我們 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n,\mathbf{w}_{n+1}$ 仍保持 linearly independent. 利用這個概念我們可以回答 finitely generated vector space 的 subspace 也是 finitely generated.

Proposition 3.5.6. 假設 V 為 *finitely generated vector space.* 若 W 為 V 的 *subspace,* 則 W 為 *finitely generated vector space.*

Proof. 依 V 為 finitely generated 的假設, 存在 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$ 滿足 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)=V$. 由於 $\{\mathbf{0}\}=\mathrm{Span}(\mathbf{0})$ 為 finitely generated, 我們僅需要考慮 $W\neq\{\mathbf{0}\}$ 的情況. 我們用反證法, 假設 W 不是 finitely generated. 現任取 $\mathbf{w}_1\in W$ 其中 $\mathbf{w}_1\neq\mathbf{0}$. 由於 W 不是 finitely generated, 我們知 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1)\neq W$, 亦即存在 $\mathbf{w}_2\in W$ 且 $\mathbf{w}_2\notin\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1)$. 由 Lemma 3.5.5 知 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2$ 為 linearly independent. 同理, 因 W 不是 finitely generated, 我們知 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)\neq W$ 亦即存在 $\mathbf{w}_3\in W$ 且 $\mathbf{w}_3\notin\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)$. 由 Lemma 3.5.4 知 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ 為 linearly independent. 這樣一直下去, 利用數學歸納法假設我們得 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k\in W$ 為 linearly independent. 由於 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)\neq W$, 存在 $\mathbf{w}_{k+1}\in W$ 且 $\mathbf{w}_{k+1}\notin\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k)$. 因此再由 Lemma 3.5.4 知 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_k,\mathbf{w}_{k+}$ 為 linearly independent. 我們利用數學歸納法證明了, 若 W 不是 finitely generated, 則對任意 $m\in\mathbb{N}$, 皆存在 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m\in W$ 為 linearly independent. 然而這在 $m>n$ 是會造成矛盾的. 因為此時由於 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m\in W\subseteq V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, Lemma 3.5.5 告訴我們 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_m$ 必為 linearly dependent. 因此知 W 為 finitely generated vector space. □

Question 3.10. 利用在 $P(\mathbb{F})$ 中對於任意 $n\in\mathbb{N}$, $x^n,x^{n-1},\ldots,x,1$ 為 *linearly independent,* 證明 $P(\mathbb{F})$ 不是 *finitely generated vector space.*

前面提過若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$, 要知道 $\mathbf{v}\in V$ 是否屬於 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$ 這是一個存在性的問題, 也就是問是否存在 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$. 但若已知 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 是否會存在另一組 $c'_1,\ldots,c'_n\in\mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}=c'_1\mathbf{v}_1+\cdots+c'_n\mathbf{v}_n$ 呢? 這個唯一性的問題就會和 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是否為 linearly independent 有關了. 我們有以下的結果.

Proposition 3.5.7. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$.

(1) 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent,* 則對任意 $\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的 *linear combination* 的寫法不唯一. 也就是說存在 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 以及 $c'_1,\ldots,c'_n\in\mathbb{F}$ 其中某個 $c_i\neq c'_i$ 使得 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=c'_1\mathbf{v}_1+\cdots+c'_n\mathbf{v}_n$.

(2) 若 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly independent,* 則對任意 $\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 將 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的 *linear combination* 的寫法唯一. 也就是說若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 則對任意 $c'_1,\ldots,c'_n\in\mathbb{F}$ 其中某個 $c_i\neq c'_i$, 皆有 $\mathbf{v}\neq c'_1\mathbf{v}_1+\cdots+c'_n\mathbf{v}_n$.

Proof. (1) 因為 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 故存在 $d_1,\ldots,d_n\in\mathbb{F}$ 且某個 $d_i\neq 0$ 使得 $d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$. 現若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$, 考慮 $c'_j=c_j+d_i\in\mathbb{F}$, for $j=1,\ldots,n$. 此時因 $d_i\neq 0$, 故知 $c_i\neq c'_i$, 但我們仍有

$$
\begin{aligned}
&c'_1\mathbf{v}_1+\cdots+c'_n\mathbf{v}_n=(c_1+d_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(c_n+d_n)\mathbf{v}_n=\\
&\qquad(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n)+(d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_n\mathbf{v}_n)=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n+\mathbf{0}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n.
\end{aligned}
$$

(2) 現假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 對任意 $\mathbf{v}\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 假設存在 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 以及 $c'_1,\ldots,c'_n\in\mathbb{F}$ 滿足 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$ 以及 $\mathbf{v}=c'_1\mathbf{v}_1+\cdots+c'_n\mathbf{v}_n$, 此時 $(c_1-c'_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(c_n-c'_n)\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, 故由 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent 知 $c_1-c'_1=\cdots=c_n-c'_n=0$, 即 $c_1=c'_1,\ldots,c_n=c'_n$, 得證 $\mathbf{v}$ 寫成 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的 linear combination 的寫法唯一. □

3.6. Basis and Dimension

對於一個 vector space V, 我們希望能找到一個集合 S 使得 $V = \mathrm{Span}(S)$. 這樣我們要了解 V 便只要了解 S 即可. 當然了 S 越大越容易展成 V, 但是我們又希望其越小越好, 這樣就可以用小一點的集合來了解 V. 如何找到這樣大小合宜的 S 便是 basis 的概念.

假設 V 是 over $\mathbb{F}$ 的 vector space 且 $V \neq \{\mathbf{0}\}$. 我們可以在 V 中任取非零向量 $\mathbf{v}_1$, 考慮 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$. 若 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1) = V$, 則我們找到集合 $S_1 = \{\mathbf{v}_1\}$ 使得 $\mathrm{Span}(S_1) = V$, 且由於 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, 依定義 S_1 是 linearly independent. 若 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1) \subsetneq V$, 表示存在 $\mathbf{v}_2 \in V$ 且 $\mathbf{v}_2 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$, 此時考慮 $S_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. 由於 $\mathbf{v}_2 \notin \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$, 我們知 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是 linearly independent, 故若 $\mathrm{Span}(S_2) = V$, 我們找到了 S_2 是 V 的 spanning set 且 S_2 為 linearly independent. 這樣一直下去假設我們找到 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set 且為 linearly independent. 此時有了 spanning set 的存在性以及 linearly independent 的唯一性, 則 V 中的元素都可以唯一寫成 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 的 linear combination, 也因此我們有以下的定義.

Definition 3.6.1. 假設 V 為 vector space. 若 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set 且為 linearly independent, 則稱 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 *basis*.

首先要注意 spanning set 未必是 linearly independent. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中 $\{\mathbf{v}_1 = (1,0), \mathbf{v}_2 = (0,1), \mathbf{v}_3 = (1,1)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的 spanning set, 但不是 linearly independent (因 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$). 同樣的 linearly independent 的元素未必形成 spanning set. 例如在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\mathbf{w}_1 = (1,0,0), \mathbf{w}_2 = (0,1,0)$ 就是 linearly independent, 但 $\mathrm{Span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq \mathbb{R}^3$. 因此要說明 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis, 必須說明 $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = V$ 以及 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 缺一不可. 當然了, 若 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set 或 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 為 linearly independent 其中只要任一項不滿足, 則知 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 不是 V 的 basis. 例如前面舉的例子 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 就不是 $\mathbb{R}^2$ 的 basis, 而 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 也不是 $\mathbb{R}^3$ 的 basis. 接下來我們看幾個常見的 vector space 的 basis.

Example 3.6.2. 假設 $\mathbb{F}$ 是一個 field, 我們考慮以下常見 over $\mathbb{F}$ 的 vector spaces.

(A) 在 $\mathbb{F}^n$ 中考慮 $\mathbf{e}_1 = (1,0,\dots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\dots,o), \dots, \mathbf{e}_n = (0,0,\dots,o,1)$ (即 $\mathbf{e}_i$ 為 i-th entry 為 1, 其他 entry 為 0 的向量), 由於對任意 $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$, 我們有 $(c_1, \dots, c_n) = c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n$, 知 $\mathrm{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, be_n) = \mathbb{F}^n$. 又若 $c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, 表示 $(c_1, \dots, c_n) = (0, \dots, 0)$, 亦即 $c_1 = \cdots = c_n = 0$, 故知 $\mathbf{e}_1, \dots, be_n$ 為 linearly independent. 因此 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 為 $\mathbb{F}^n$ 的一組 basis. 這一組 basis 是 $\mathbb{F}^n$ 中最直接且最常用的 basis 所以我們又稱之為 $\mathbb{F}^n$ 的 *standard basis*.

(B) 在 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中, 考慮 E_{ij}, 為 (i,j)-th entry 為 1, 其他 entry 為 0 的 $m \times n$ matrix. 則利用和 $\mathbb{F}^n$ 上類似的證法, 我們可以知 $\{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的 spanning set 且為 linearly independent, 故為 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的一組 basis.

(C) 在 $P_n(\mathbb{F})$ 中 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 可展成 $P_n(\mathbb{F})$ 且為 linearly independent, 所以是 $P_n(\mathbb{F})$ 的 basis. 這組 basis 也稱為 $P_n(\mathbb{F})$ 的 *standard basis*.

在 Definition 3.6.1 中 V 可由有限多個元素所展成, 所以此時的 V 依定義是 finitely generated vector space (Definition 3.4.3), 不過我們提過一般的 vector space 未必會是 finitely generated, 所以對於一般的 vector space, 我們有以下 basis 的定義.

Definition 3.6.3. 假設 V 為 vector space 且 $S \subseteq V$. 若 S 為 V 的 spanning set 且為 linearly independent, 則稱 S 為 V 的一組 *basis.*

由於我們已定義 $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$ 且 $\emptyset$ 為 linearly independent, 所以依照 Definition 3.6.3, 我們說空集合 $\emptyset$ 是 zero vector space $\{\mathbf{0}\}$ 的 basis. 另外在 Example 3.4.4 中我們知道 $P(\mathbb{F})$ 不是 finitely generated. 然而很容易看出 $\{1, x, x^2, \ldots\}$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的 spanning set 且為 linearly independent, 所以 $\{1, x, x^2, \ldots\}$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的 basis.

我們碰到的第一個問題便是 basis 的存在性問題. 也就是說, 對於一般的 vector space 是不是都會有 basis. 接下來我們要說明非零的 finitely generated vector space 都會有 basis. 其實這對於不是 finitely generated 的 vector space 也對, 不過由於這會牽涉到較抽象的邏輯概念而且我們以後談論的 vector space 都是 finitely generated, 所以我們不去談論它. 在本講義中我們僅探討 finitely generated vector space. 既然 V 為 finitely generated, 我們假設 $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 為其 spanning set. 此時若 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 則 S 就會是 V 的一組 basis. 但如果不幸的 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 為 linearly dependent, 這表示存在某個 $\mathbf{v}_i$ 可寫成其他向量的線性組合，為了方便起見就設此向量為 $\mathbf{v}_n$ 好了, 也就是說 $\mathbf{v}_n \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$. 此時集合 $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}\}$ 雖然元素變少了但仍為 V 的 spanning set. 這是因為 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) + \mathrm{Span}(\mathbf{v}_n) = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$. 現若 S_1 為 independent, 則 S_1 便會是 V 的 basis. 若不是 independent, 我們又可如法炮製，找到更少元素的 S_2 滿足仍為 V 的 spanning set. 因為 S 的元素僅有有限多個，這樣的程序一直下去，最終一定會停止。也就是最後會找到 S 的一個子集合，仍為 V 的 spanning set 且為 linearly independent, 也因此找到 V 的一組 basis. 這是我們找到 basis 的基本方法，不過“一直下去”這樣的說法不太好，最好用數學歸納法解釋，以下我們便用數學歸納法證明。

Proposition 3.6.4. 假設 $V \neq \{\mathbf{0}\}$ 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, 且 $S \subseteq V$ 為一個 *finite set* 滿足 $V = \mathrm{Span}(S)$. 則存在 $S' \subseteq S$ 為 V 的一組 *basis.* 也就是說, 若 $V \neq \{\mathbf{0}\}$ 為 *finitely generated vector space over* $\mathbb{F}$, 則存在 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ 為 V 的一組 *basis.*

Proof. 我們對 S 的元素個數 n 做數學歸納法. 假設 $n = 1$, 即 $V = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$, 因 $V \neq \{\mathbf{0}\}$, 知 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. 故由 $\mathbf{v}_1$ 本身是 linearly independent, 得證 $S = \{\mathbf{v}_1\}$ 是 V 的 basis. 假設 $n = k$ 時成立, 亦即對所有有 k 元素的集合 S, 若 $V = \mathrm{Span}(S)$, 則存在 $S' \subseteq S$ 為 V 的 basis. 我們要證明當 $n = k+1$ 時亦成立. 現假設 $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}\}$ 且 $\mathrm{Span}(S) = V$, 若 S 為 linearly independent, 則依定義令 $S' = S$, 即為 V 的一組 basis. 而若 S 不是 linearly independent, 則不失一般性, 我們假設 $\mathbf{v}_{k+1} \in \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$. 此時令 $\tilde{S} = S \setminus \{\mathbf{v}_{k+1}\} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, 因 $V = \mathrm{Span}(\tilde{S})$ 且 $\tilde{S}$ 的元素個數為 k, 故由歸納假設知存在 $S' \subseteq \tilde{S} \subseteq S$ 為 V 的一組 basis. 得證本定理. $\square$

Proposition 3.6.4 說的是當 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的 spanning set, 則我們可以在 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 中捨去一些元素使其為 linearly independent 且仍為 V 的 spanning set, 故可成為 V 的一組 basis. 反之, 若 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的一組 linearly independent set, 則我們可以加入一些元素擴大 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$, 使其成為 V 的 spanning set 且仍保持 linearly independent, 故可成為 V 的一組 basis. 原因是若 $S=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set, 則 S 自然是 V 的一組 basis. 但如果不是 spanning set, 表示存在 $\mathbf{v}_{n+1}\in V$ 但 $\mathbf{v}_{n+1}\not\in\mathrm{Span}(S)$. 此時考慮 $S_1=S\cup\{\mathbf{v}_{n+1}\}=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}\}$, 由 Lemma 3.5.4, S_1 仍保持 linearly independent. 然而此時 S_1 的元素變多了且其所展成的空間也變大了。如果 $\mathrm{Span}(S_1)=V$, 則我們得 S_1 為 V 的一組 basis. 若 S_1 仍不是 spanning set, 則我們可以如法炮製，找到更多元素的 S_2 使其仍保持 linearly independent. 因為 linear independent 的集合其元素個數不可能大於 V 的 spanning set 的個數 (Lemma 3.5.5), 這樣的程序一直下去，最終一定會停止。也就是最後會找到一個包含 S 的一個集合，仍為 linearly independent 且為 V 的 spanning set, 也因此找到 V 的一組 basis. 這是我們另一個找到 basis 的方法，不過“一直下去”這樣的說法不太好，所以以下我們依然使用數學歸納法證明。

Proposition 3.6.5. 假設 $V\neq\{\mathbf{0}\}$ 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, 且 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m)$. 若 $S=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}\subseteq V$ 為 *linearly independent,* 則存在 $S'\subseteq\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 使得 $S\cup S'$ 為 V 的 *basis.*

Proof. 我們依然對 S 的元素個數做歸納法, 不過這次是做反向的歸納法. 注意因 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m)$ 且 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 故由 Lemma 3.5.5 知 $n\leq m$, 所以我們可以假設 $n=m-t$, 其中 $0\leq t\leq m-1$. 我們要對 t 做 mathematical induction. 當 $t=0$ 時表示 $m=n$, 此時我們要說明 $S=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 spanning set. 這是因為若 $\mathrm{Span}(S)\neq V$, 表示存在 $\mathbf{w}\in V$ 且 $\mathbf{w}\not\in\mathrm{Span}(S)$, 故由 Lemma 3.5.4 知 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n,\mathbf{w}\}$ 為 linearly independent, 但此時 $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n.\mathbf{w}\}$ 有 $n+1=m+1$ 個元素, 多於 $\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m)$ 的 m 個元素, 與 Lemma 3.5.5 相矛盾, 故知 S 為 V 的 spanning set. 再利用已知 S 為 linearly independent, 故令 $S'=\emptyset$ 得證 $S=S\cup S'$ 為 V 的 basis. 現假設 $t=k$ 時成立, 即若 $S=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{m-k}\}$ 為 linearly independent, 則存在 $S'\subseteq\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 使得 $S\cup S'$ 為 V 的 basis. 現考慮 $t=k+1$ 的情形, 即 $S=\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{m-k-1}\}$ 為 linearly independent. 首先考慮 S 是否為 V 的 spanning set. 若 $V=\mathrm{Span}(S)$, 則依定義知 S 為 V 的一組 basis, 故取 $S'=\emptyset$, 則 $S'\subseteq\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$, 且 $S\cup S'=S$ 為 V 的 basis. 而若 $\mathrm{Span}(S)\neq V$, 表示 $\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 中必有一元素 $\mathbf{u}_i\not\in\mathrm{Span}(S)$, 否則若 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m$ 皆屬於 $\mathrm{Span}(S)$, 會造成 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m)\subseteq\mathrm{Span}(S)$ 之矛盾. 現考慮 $\tilde{S}=S\cup\{\mathbf{u}_i\}$, 因 $\mathbf{u}_i\not\in\mathrm{Span}(S)$ 由 Lemma 3.5.4 知 $\tilde{S}$ 為 linearly independent, 再由 $\tilde{S}$ 的元素個數為 $m-k$, 故由歸納假設知存在 $\tilde{S}'\subseteq\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 使得 $\tilde{S}\cup\tilde{S}'$ 為 V 的 basis. 故令 $S'=\{\mathbf{u}_i\}\cup\tilde{S}'$, 我們有 $S'\subseteq\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_m\}$ 且 $S\cup S'=S\cup\{\mathbf{u}_i\}\cup\tilde{S}'=\tilde{S}\cup\tilde{S}'$ 為 V 的 basis. $\square$

我們已經知道 finitely generated vector space 的 basis 是存在的, 不過它並不唯一. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中除了 standard basis $\{(1,0),(0,1)\}$ 外, 我們很容易看出 $\{(1,1),(0,1)\}$ 也可以是 $\mathbb{R}^2$ 的 basis. 不過 basis 雖然不唯一, 不過在 finitely generated vector space 中組成 basis 的元素個數是固定的. 我們有以下的定理.

Theorem 3.6.6. 假設 V 為 *vector space over* $\mathbb{F}$, 且 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 和 $\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\}$ 皆為 V 的 *basis,* 則 $n=m$.

Proof. 我們用反證法, 假設 $n\neq m$, 不失一般性我們就假設 $m>n$. 因 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 故 $\mathbf{u}_i\in\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, $\forall i=1,\ldots,m$. 因此由 Lemma 3.5.5 知 $\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\}$ 是 linearly dependent. 此與 $\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_m\}$ 是 basis 的假設相矛盾, 故得證 $m=n$. □

Theorem 3.6.6 告訴我們組成 V 的一組 basis 的元素個數是固定的. 也就是說若找到 n 個元素形成 V 的 basis, 則 V 其他的 basis 一定也會是由 n 個元素所組成. 由於這個重要的結果我們有以下的定義.

Definition 3.6.7. 假設 V 是一個 finitely generated vector space over $\mathbb{F}$. 組成 V 的一組 basis 的元素個數稱為 V over $\mathbb{F}$ 的 *dimension* (維度), 用 $\dim_{\mathbb{F}}(V)$ 來表示.

由於組成 finitely generated vector space 的一組 basis 的元素個數是有限的, 所以以後我們稱 finitely generated vector space 為 *finite dimensional vector space.*

Example 3.6.8. 我們探討在 Example 3.6.2 中的 finite dimensional vector space 的維度為多少.

(A) 考慮 $\mathbb{F}^n$ 中的 standard basis $\{\mathbf{e}_i\mid 1\leq i\leq n\}$, 因為共有 n 個元素所以 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)=n$.

(B) 我們知道 $\{E_{ij}\in\mathscr{M}_{m\times n}\mid 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n\}$ 是 $\mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的一組 basis. 因此 $\dim\mathbb{F}(\mathscr{M}_{m\times n})=m\times n$.

(C) 我們知道 $\{x^n,\ldots,x,1\}$ 是 $P_n(\mathbb{F})$ 的 spanning set 且為 linearly independent. 故知 $\{x^n,\ldots,x,1\}$ 為 $P_n(\mathbb{F})$ 的一組 basis, 因此 $\dim_{\mathbb{F}}(P_n(\mathbb{F}))=n+1$.

大家或許注意到, 我們在表示維度的 dim 符號的下標特別標上 $\mathbb{F}$, 即 $\dim_{\mathbb{F}}$. 這個原因是強調我們將 vector space 看成 over $\mathbb{F}$ 的 vector space 所得的 dimension. 我們曾經提過, 同樣的集合我們有可能看成 over 不同的 field 的 vector space. 在此情況之下它們的 basis 也就會不同, 也因此我們要標示用哪一個 field. 我們看以下的例子.

Example 3.6.9. 我們用 $\mathbb{C}$ 表示 complex numbers (複數) 所成的 field, 而用 $\mathbb{R}$ 表示 real numbers (實數) 所成的 field. 現考慮集合 $\mathbb{C}^2=\{(z_1,z_2)\mid z_1,z_2\in\mathbb{C}\}$. 很容易檢查用一般的加法及係數積, $\mathbb{C}^2$ 是 vector space over $\mathbb{C}$, 也會是 vector space over $\mathbb{R}$. 首先我們知道 $\{(1,0),(0,1)\}$ 是 $\mathbb{C}^2$ 看成 over $\mathbb{C}$ 的 vector space 的 basis (Example 3.6.2 (A) $n=2$, $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 的情況), 所以我們得 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)=2$. 不過 $\{(1,0),(0,1)\}$ 在 over $\mathbb{R}$ 之下就不是 basis 了. 很容易看出來任何 $(1,0),(0,1)$ over $\mathbb{R}$ 的 linear combination 都無法表示 $(i,0)$ 這一個 $\mathbb{C}^2$ 的元素 (這裡 i 是滿足 $i^2=-1$ 的純虛數). 不過 $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ 就是 $\mathbb{C}^2$ over $\mathbb{R}$ 的 spanning set. 這是因為任意 $\mathbb{C}^2$ 的元素都可以寫成 $(a+bi,c+di)$ 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, 所以可得 $(a+bi,c+di)=a(1,0)+b(i,0)+c(0,1)+d(0,i)$. 又 $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ over $\mathbb{R}$ 是 linearly independent. 這是因為若 a,b,c,d 是實數滿足 $a(1,0)+b(i,0)+c(0,1)+d(0,i)=(0,0)$, 即表示 $a+bi=0$ 且 $c+di=0$, 故得 $a=b=c=d=0$. 由此知 $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$ 是 $\mathbb{C}^2$ over $\mathbb{R}$ 的 basis, 所以我們有 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2)=4$.

由 Example 3.6.9, 我們知道要說明一個 vector space 的 dimension 為何, 一定要說明其 over 的 field 是甚麼. 不過一般情形, 當我們很明確知道 over 的 field 是甚麼而沒有如 Example 3.6.9 這種模稜兩可的情形, 我們便會省略直接用 $\dim(V)$ 來表示其 dimension.

對於 finite dimensional vector space 有關於 dimension 的性質, 我們匯集如下. 再次強調, 由於這裡我們只考慮 over 一個固定的 field $\mathbb{F}$, 所以我們僅用 $\dim(V)$ 來表示其 dimension.

Proposition 3.6.10. 假設 V 為 *finite dimensional vector space over* $\mathbb{F}$.

(1) 若 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 *spanning set,* 則 $\dim(V)\leq n$. 特別的, 若此時 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 *linearly dependent,* 則 $\dim(V)<n$.

(2) 若 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 *linearly independent,* 則 $\dim(V)\geq n$. 特別的, 若此時 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 不是 V 的 *spanning set,* 則 $\dim(V)>n$.

(3) 假設 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\in V$. 下列的敘述為等價.
   (a) $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 *basis.*
   (b) $\dim(V)=n$ 且 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 V 的 *spanning set.*
   (c) $\dim(V)=n$ 且 $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ 為 *linearly independent.*

(4) 若 W 為 V 的 *subspace,* 則 $\dim(W)\leq\dim(V)$. 特別的, 若 $\dim(W)=\dim(V)$ 則 $W=V$.

Proof. 為了方便起見, 我們令 $S=\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$.

(1) 依假設 $V=\mathrm{Span}(S)$, 故利用 Proposition 3.6.4 知存在 $S'\subseteq S$ 為 V 的 basis. 也就是說 S' 的元素個數就是 V 的 dimension. 然而 S' 是 S 的 subset, 所以其元素個數小於等於 S 的元素個數 n, 故得證 $\dim(V)\leq n$. 現若 S 為 linearly dependent, 即表示存在 $\mathbf{v}_i$ 可寫成 S 中其他元素的線性組合, 因此考慮 $\tilde{S}=S\setminus\{\mathbf{v}_i\}$, 我們仍有 $\mathrm{Span}(\tilde{S})=V$. 此時 $\tilde{S}$ 的元素個數為 $n-1$, 所以再套用前面所證的可得 $\dim(V)\leq n-1<n$.

(2) 依假設 S 是 linearly independent, 故利用 Proposition 3.6.5 知存在某個有限集合 S' 使得 $S\cup S'$ 為 V 的 basis. 也就是說 $S\cup S'$ 的元素個數就是 V 的 dimension. 然而 $S\subseteq S\cup S'$, 所以 $S\cup S'$ 的元素個數大於等於 S 的元素個數 n, 故得證 $\dim(V)\geq n$. 現若 S 不是 V 的 spanning set, 表示存在 $\mathbf{w}\in V$ 且 $\mathbf{w}\notin\mathrm{Span}(S)$, 因此考慮 $\tilde{S}=S\cup\{\mathbf{w}\}$, 我們仍有 $\tilde{S}$ 為 linearly independent (Lemma 3.5.4). 此時 $\tilde{S}$ 的元素個數為 $n+1$, 所以再套用前面所證的可得 $\dim(V)\geq n+1>n$.

(3) 我們要證明 (a) 可推得 (b), (b) 可推得 (c) 以及 (c) 可推得 (a). 因此知 (a),(b),(c) 是等價的.

(a) $\Rightarrow$ (b): 假設 S 是 V 的 basis, 當然 S 是 V 的 spanning set. 又由於 S 的元素個數為 n, 依定義 $\dim(V)=n$.

(b) $\Rightarrow$ (c): 由於 S 是 V 的 spanning set, 由前面 (1) 的結果, 若 S 是 linearly dependent, 則 $\dim(V) < n$. 此與 $\dim(V) = n$ 假設相矛盾, 故推得 S 是 linearly independent.

(c) $\Rightarrow$ (a): 由於 S 是 linearly independent, 由前面 (2) 的結果, 若 S 不是 V 的 spanning set, 則 $\dim(V) > n$. 此與 $\dim(V) = n$ 假設相矛盾, 故推得 S 是 V 的 spanning set. 因此得證 S 是 V 的 basis.

(4) 因 W 是 V 的 subspace, 故由 Proposition 3.5.6 知 W 亦為 finite dimensional vector space, 我們假設 $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ 為 W 的 basis. 由於 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ 且為 linearly independent, 故由 (2) 的結果知 $\dim(W) = n \leq \dim(V)$. 而若 $\dim(V) = n$, 則由 S 是 linearly independent 利用 (3)((c) $\Rightarrow$ (a)) 知 S 也是 V 的 basis, 故得證 $W = V$. $\square$

強調一下, Proposition 3.6.10 告訴我們知道 V 的 dimension 的好處. 若我們知道 $\dim(V)$ 恰好是 n, 則 (3) 告訴我們當要檢查 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是否為 V 的一組 basis 時, 則僅要檢查它們是否為 spanning set 或 linearly independent 其中一項就可. 所以我們只要選擇檢查哪一個較好處理即可. 另外若已知 W 為 V 的 subspace, 要檢查 W 是否為 V, 我們不必再像以前檢查是否每個 V 中的元素都在 W, 而只要算出 $\dim(W)$ 是否等於 n 即可.

Example 3.6.11. 很容易看出在 $P(\mathbb{R})$ 中 $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$ 為 linearly independent. 這是因為如果 $c_n, \ldots, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0 1$ 為零多項式, 則依零多項式的定義, $c_n, \ldots, c_1, c_0$ 必全為 0. 現在我們介紹 $P(\mathbb{R})$ 中另一種重要的 linearly independent 的多項式的建構方法, 稱為 *Lagrange interpolation polynomials*. 我們僅舉出一個例子, 一般狀況請大家自行推廣.

給定 a, b, c 三相異實數, 我們希望找到三個二次多項式 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 滿足

$$p_1(a) = 1, p_1(b) = p_1(c) = 0, \quad p_2(b) = 1, p_2(a) = p_2(c) = 0 \quad \text{and} \quad p_3(c) = 1, p_3(a) = p_3(b) = 0.$$

由於 $p_1(b) = p_1(c) = 0$, 我們知 $p_1(x)$ 應為 $(x-b)(x-c)$ 的倍式, 也就是存在實數 r 使得 $p_1(x) = r(x-b)(x-c)$. 但又要求 $p_1(a) = 1$, 故代入 $x = a$ 得 $r = 1/(a-b)(a-c)$. 同理可求出 $p_2(x), p_3(x)$ 因此我們有

$$p_1(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad p_2(x) = \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \quad \text{and} \quad p_3(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

我們要說明 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 為 linearly independent. 首先觀察, 若 $f(x) = c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x)$, 則代入 $x = a$ 時可由 $p_1(a) = 1, p_2(a) = p_3(a) = 0$, 得 $f(a) = c_1$. 同理知 $f(b) = c_2, f(c) = c_3$. 因此現若 $f(x)$ 為零多項式, 由 $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, 可得 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. 也就是說只有當 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 時才會使得 $c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) + c_3 p_3(x)$ 為零多項式, 得證 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 為 linearly independent.

我們知道了 $p_1(x), p_2(x), p_3(x) \in P_2(\mathbb{R})$ 為 linearly independent, 事實上 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 會是 $P_2(\mathbb{R})$ 的 spanning set. 不過要證明這一點, 需用到次數小於 3 的實係數非零多項式不會有 3 個相異實根這個事實, 說明起來有點麻煩. 不過由於我們已知 $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, 故由 Proposition 3.6.10 (3) 知 $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ 為 $P_2(\mathbb{R})$ 的一組 basis. 也就是說任何

實係數的次數小於 3 的多項式 $f(x)$ 都可以都可以找到唯一的一組 $c_1,c_2,c_3 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x)=c_1p_1(x)+c_2p_2(x)+c_3p_3(x)$. 事實上代入 $x=a,b,c$, 我們知道 $c_1=f(a)$, $c_2=f(b)$, $c_3=f(c)$ 就是這唯一的一組.

同理對於任意 n 個相異實數 $a_1,\ldots,a_n$, 我們有 n 個 $n-1$ 次的多項式 $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ 滿足 $p_i(a_i)=1$ 且當 $j\neq i$ 時, $p_i(a_j)=0$. 由於 $p_1(x),\ldots,p_n(x)\in P_{n-1}(\mathbb{R})$ 且為 linearly independent, 故由 $\dim(P_{n-1}(\mathbb{R}))=n$ 知 $p_1(x),\ldots,p_n(x)$ 為 $P_{n-1}(\mathbb{R})$ 的一組 basis.

找到一個 over $\mathbb{F}$ 的向量空間 V 之一組 basis $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的好處是, 由 $V=\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$, 我們知對任意 $\mathbf{v}\in V$, 皆可找到 $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$. 又因 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 linearly independent, 我們知這些 $c_1,\ldots,c_n$ 是唯一的 (Corollary 3.5.7). 因此當我們固定 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 這一組 basis, 對任意 V 中一個向量 $\mathbf{v}$, 若 $\mathbf{v}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$, 我們可以用坐標的方式來表示它, 即 $(c_1,\cdots,c_n)$. 這樣我們就給了 V 中的向量和 $\mathbb{F}^n$ 中的向量之間一個一對一的對應關係. 換言之, 我們可以將 V 這種抽象的向量空間視為 $\mathbb{F}^n$ 這種具體的向量空間. 這種坐標化的概念, 在之後是非常重要的.