3.5. Invertible Matrix

所謂 invertible matrix 就是"可逆矩陣". 我們會發現只有 square matrix 才有可能是 invertible matrix, 但並不是所有的 square matrix 都是 invertible matrix. 這一節中我們會探討有關 invertible matrix 的相關性質, 並介紹判斷一個方陣是否為 invertible 且找出其反矩陣的方法.

當初我們將聯立方程組用矩陣乘法的方式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 來表示, 其中有一個很大的目的就是希望將解聯立方程式的問題此簡化成類似實數上解 $ax = b$ 的情形. 在實數情況, 當 $a \neq 0$ 時, $ax = b$ 的解就是很簡單的 $x = ba^{-1}$. 但在矩陣的情形, 我們沒有除法, 所以只能借助乘法來幫忙. 由於實數中 a^{-1} 有 $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ 的性質, 所以推廣這個概念至矩陣, 我們便希望找到矩陣 B 滿足 BA 以及 AB 為 identity. 不過當 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 且 $m \neq n$ 時, 由 Corollary 3.4.3 以及 Corollary 3.4.6, 我們知道不可能存在 B 同時滿足 BA 和 AB 皆為 identity matrix (因為 $\operatorname{rank}(A)$ 不可能同時為 m 和 n). 所以我們僅對 $m = n$, 即 A 為 square matrix 時有以下的定義.

Definition 3.5.1. 假設 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 為 n 階 square matrix, 若存在 $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $AB = BA = I_n$, 則稱 A 為 *invertible*. 反之, 我們稱 A 為 *non-invertible*

再一次強調當 A 不是方陣時, 我們知 A 絕對不是 invertible. 因此當我們不知矩陣 A 的階數時, 絕對不能用存在 B 滿足 BA 為 identity 來說 A 為 invertible, 必須檢查另一邊 AB 亦為 identity 才可. 不過當 A 為 $n \times n$ square matrix, 確實檢查單邊就可以確定 A 為 invertible. 我們有以下的性質.

Theorem 3.5.2. 假設 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 為 n 階 *square matrix.* 則下列是等價的.

(1) A 為 *invertible matrix.*

(2) 存在 $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $BA = I_n$.

(3) $\operatorname{rank}(A) = n$.

(4) 存在 $C \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $AC = I_n$.

Proof. 依 A 為 invertible 的定義, 我們知若 A 為 invertible, 則存在 $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $BA = I_n$. 故 $(1) \Rightarrow (2)$.

由 A 為 $n \times n$ matrix 以及 Theorem 3.4.5 知存在 $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $BA = I_n$ 若且唯若 A 化為 echelon form 後 pivot 的個數為 n. 故 $(2) \Leftrightarrow (3)$.

同理, 由 A 為 $n \times n$ matrix 以及 Theorem 3.4.2 知存在 $C \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $AC = I_n$ 若且唯若 A 化為 echelon form 後 pivot 的個數為 n. 故 $(3) \Leftrightarrow (4)$.

最後, 由 A 化為 echelon form 後 pivot 的個數為 n 知存在 $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $BA = I_n$ 以及 $AC = I_n$. 若能證得 $C = B$, 則由 $BA = AB = I_n$ 得證 A 為 invertible. 然而由 $BA = I_n$, 得 $(BA)C = I_nC = C$. 又由 $(BA)C = B(AC) = BI_n = B$, 得證 $B = C$. 故 $(3) \Rightarrow (1)$. 得證本定理. $\square$

當一個 $n\times n$ matrix 的 rank 為 n 時, 有的書為了強調這個 rank 和階數相等的特殊情況, 特別稱之為 *nonsingular matrix.* 所以由 Theorem 3.5.2 我們知 invertible matrix 就是 nonsingular matrix. 反之, non-invertible matrix 就是 singular matrix. 不過為了讓大家不被這麼多名詞弄混. 以後我們一律採用 invertible 和 non-invertible 這樣的說法, 而不用 nonsingular 和 singular 這樣的說法.

由 Theorem 3.5.2 的證明我們知若 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 且存在 $B,C\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $BA=I_n$ 且 $AC=I_n$, 則 $B=C$. 我們自然會問有沒有可能存在不同的 $B,B'\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 皆滿足 $BA=I_n$ 以及 $B'A=I_n$. 下一個定理告訴我們這樣的方陣其實是唯一的.

Corollary 3.5.3. 假設 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 且 $B,B'\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 滿足 $BA=I_n$ 以及 $B'A=I_n$. 則 $B=B'$.

Proof. 由 Theorem 3.5.2 我們知 A 為 invertible 且由其證明知 $BA=AB=I_n$ 以及 $B'A=AB'=I_n$. 故
$$B=I_nB=(B'A)B=B'(AB)=B'I_n=B'.$$
□

由 Corollary 3.5.3, 我們知道若 A 為 $n\times n$ invertible matrix, 則僅會存在唯一的一個 $n\times n$ matrix B 滿足 $BA=AB=I_n$. 它和 A 的關係如同在實數上非零實數的乘法的 inverse (乘法反元素), 所以我們給以下的定義.

Definition 3.5.4. 假設 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 為 invertible matrix. 我們稱唯一滿足 $BA=AB=I_n$ 的 $n\times n$ matrix B 為 A 的 *inverse* (反矩陣), 且用 A^{-1} 表示.

給定一 $n\times n$ invertible matrix A 由於其反矩陣是唯一的, 所以若要確定 $B=A^{-1}$ 我們僅要檢查是否 $BA=I_n$ 或 $AB=I_n$ 即可. 我們有以下之性質

Proposition 3.5.5. 假設 $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$. 我們有以下之性質

(1) 若 A 為 *invertible,* 則 A^{-1} 亦為 *invertible* 且
$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

(2) A 為 *invertible* 若且唯若 A^{T} 為 *invertible* 且此時
$$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

(3) A,B 皆為 *invertible* 若且唯若 AB 為 *invertible.* 且此時
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Proof. 由 Theorem 3.5.2, 我們要說一個 $n\times n$ matrix 為 invertible, 只要找到 $B\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $BA=I_n$ 或 $AB=I_n$ 且此時由唯一性 (Corollary 3.5.3) 知 $B=A^{-1}$.

(1) 依定義 A^{-1} 亦為 $n\times n$ matrix 故 Theorem 3.5.2 適用. 利用 $A^{-1}A=I_n$, 得知 A^{-1} 亦為 invertible 且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

(2) 依定義 A^{T} 亦為 $n\times n$ matrix 故 Theorem 3.5.2 適用. 由 $A^{-1}A=I_n$ 利用 Proposition 3.2.4 得

$$I_n=(A^{-1}A)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

故知 A^{T} 為 invertible 且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$. 反之若 A^{T} 為 invertible, 由前知 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 為 invertible, 故由利用 Proposition 3.2.4 $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$ 得證 A 為 invertible.

(3) 依定義 AB 為 $n\times n$ matrix 故 Theorem 3.5.2 適用. 現若 A,B 皆為 invertible, 則由

$$(AB)B^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AI_nA^{-1}=AA^{-1}=I_n,$$

得證 AB 為 invertible 且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 反之, 若 AB 為 invertible, 且令 $C=(AB)^{-1}$. 此時由 $(AB)C=I_n$ 得 $A(BC)=I_n$, 故由假設 A 為 $n\times n$ matrix 以及 Theorem 3.5.2 得證 A 為 invertible. 同理, 由 $C(AB)=I_n$, 得 $(CA)B=I_n$, 得證 B 為 invertible. □

要注意 Proposition 3.5.5 (3) 中由 AB invertible 推得 A,B 皆為 invertible 是需要用到 A,B 皆為 $n\times n$ matrix. 否則當 $m\neq n$ 時, 在 Theorem 3.4.2 中我們知道有可能 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}),C\in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ 滿足 $AC=I_m$. 此時 I_m 為 invertible, 但 A,C 皆為 non-invertible. 同樣的, 當 A,B 為方陣時, 因為由 AB 為 invertible 可推得 A,B 皆為 invertible, 故知 BA 亦為 invertible. 也就是說當 A,B 為方陣時 AB 為 invertible 和 BA 為 invertible 是等價的. 但在 A,B 不為方陣時, 若 AB 為 invertible 會導致 BA 不為 invertible.

Question 3.10. 試舉例 A,B 不為 *invertible* 但 AB 為 *invertible.* 同時也驗證此時 BA 為 *non-invertible.*

接下來我們探討如何判別一個具體的 $n\times n$ matrix 是否為 invertible, 且若為 invertible 如何找出其 inverse. 這個問題可藉由將方陣利用 elementary row operations 化為 reduced echelon form 來處理. 事實上, 當 A 為 $n\times n$ matrix, 由 Theorem 3.5.2 我們知道 A 為 invertible 若且唯若 A 化為 echelon form 後其 pivot 的個數等於 n. 因此我們只要將 A 化為 echelon form 後計算其 pivot 的個數, 便可以知道 A 是否為 invertible. 若 A 為 invertible, 即 pivot 的個數為 n, 此時由於 A 的 reduced echelon form 為 $n\times n$ matrix, 故得 A 的 reduced echelon form 為 I_n. 也就是說我們可以用 elementary row operations 將 A 化為 I_n. 故由 Lemma 3.3.1 我們知存在 $E\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 為一些 elementary matrix 的乘積使得 $EA=I_n$. 事實上若將 augmented matrix $[A|I_n]$ 利用 elementary row operations 化為 $[I_n|E]$, 則 $EA=I_n$, 故此時 E 就是 A^{-1}. 我們看以下的例子.

Example 3.5.6. 考慮矩陣

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

我們要決定是否 A 是否為 invertible. 若為 invertible, 要找出 A^{-1}.

我們直接考慮 augmented matrix $[A|I_4]$, 利用 elementary row operation 將 A 的部分轉換成 echelon form. 首先將 1-st row 分別乘上 -1, 3 加至 3-rd, 4-th row, 即

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

接著將 3-rd row 乘上 3/2 加至 4-th row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right].$$

此時 augmented matrix 左半部為 echelon form, 其 pivot 的個數為 4, 故知 A 為 invertible. 我們繼續將左半部化為 reduced echelon form 便可得到 A^{-1}.

先將 4-th row 乘以 2, 然後將所得的 augmented matrix 的 4-th row 分別乘上 -3, -4, 1 加至 3-rd, 2-nd 和 1-st row, 即

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 & 1 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -10 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

接著將 3-rd row 乘以 $-1/2$, 然後將所得的 augmented matrix 的 3-rd row 分別乘上 3, -1 加至 2-nd 和 1-st row, 即

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 & 1 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

最後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 -1. 此時所得 augmented matrix 左半部為 reduced echelon form (即 I_4), 故其右半部為 A^{-1}, 即

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

由前面討論我們知當 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 為 invertible, 則存在 elementary matrices $E_1, \ldots, E_k$ 使得 $(E_k \cdots E_1)A = I_n$. 亦即 $A^{-1} = E_k \cdots E_1$, 由 Proposition 3.5.5 (3), 我們知 $E_1, \ldots, E_k$ 皆為 invertible, 且由 $(A^{-1})^{-1} = A$, 得 $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$. 事實上這些 elementary matrix E_i 的 inverse 就是將 E_i 還原成 I_n 的 elementary row operation 所對應的 elementary matrix. 也就是說 E_i^{-1} 亦為 elementary matrix. 因此我們有以下的定理.

Proposition 3.5.7. *A 為 invertible matrix 若且唯若 A 為一些 elementary matrices 的乘積.*

Example 3.5.8. 考慮矩陣
$$A=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}.$$
在求 A 的 inverse 的過程中, 首先我們將 1-st row 和 2-nd row 交換. 令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_1. 因用相同的 elementary row operation 可將 E_1 還原成 I_3, 故 $E_1=E_1^{-1}$, 即
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&2&0&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right]\rightsquigarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&2&0&1&0&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right], E_1=E_1^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$
接著將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 -1 加至 3-rd row. 令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_2. 因將 2-nd row 乘上 1 加至 3-rd row 的 elementary row operation 可將 E_2 還原成 I_3, 故所得的 augmented matrix 及 E_2, E_2^{-1} 分別為
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&2&0&1&0&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right], E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}, E_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$
然後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 $1/2$. 令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_3. 因將 2-nd row 乘上 2 的 elementary row operation 可將 E_3 還原成 I_3, 故所得的 augmented matrix 及 E_3, E_3^{-1} 分別為
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right], E_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}, E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$
最後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 1 加至 1-st row. 令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_4. 因將 2-nd row 乘上 -1 加至 3-rd row 的 elementary row operation 可將 E_4 還原成 I_3, 故所得的 augmented matrix 及 E_4, E_4^{-1} 分別為
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right], E_4=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, E_4^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$
我們檢查可得
$$A^{-1}=E_4E_3E_2E_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}, A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&0\\1&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}.$$

最後讓我們回到解聯立方程組的問題. 怎樣的 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 會使得對任意 $\mathbf{b}\in\mathbb{F}^m$, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 皆有解且解唯一呢? 由 Theorem 3.4.2 和 Theorem 3.4.5 知此時 $\mathrm{rank}(A)=m$ 且 $\mathrm{rank}(A)=n$, 即 $m=n$. 也就是說 A 必須是 $n\times n$ 且 $\mathrm{rank}(A)=n$. 因此由 Theorem 3.5.2 知 A 為 $n\times n$ invertible matrix. 事實上我們有以下的等價關係. 由於它們直接套用 Theorem 3.4.2 和 Theorem 3.4.5 就可推得, 我們就不再證明了.

Theorem 3.5.9. *假設 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 令 $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\in\mathbb{F}^n$ 為 A 的 column vectors. 則下列是等價的.*

(1) A 為 *invertible matrix.*

(2) $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)=\mathbb{F}^n$.

(3) 對於任意 $\mathbf{b}\in\mathbb{F}^n$, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 皆有解.

(4) 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 沒有 *nontrivial solution.*

(5) 對於任意 $\mathbf{b}\in\mathbb{F}^n$, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 皆有解且解唯一.

設 $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 為 invertible matrix, 則對任意 $\mathbf{b}\in\mathbb{F}^n$, 我們可以利用 A 的反矩陣 A^{-1} 得到聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的唯一解. 事實上若令 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$, 此時 $A\mathbf{x}=A(A^{-1}\mathbf{b})=(AA^{-1})\mathbf{b}=\mathbf{b}$. 又由 Theorem 3.5.9 知此時 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解唯一. 故 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 唯一的一組解.

Example 3.5.10. 考慮聯立方程組

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & b_1 \\ & -x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = & b_3 \\ -3x_1 & & & -x_4 & = & b_4 \end{array}$$

其中 b_1,b_2,b_3,b_4 為任意實數. 由於此時聯立方程組為 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, 其中 A 為 Example 3.5.6 中的 4×4 matrix A 且 $\mathbf{b}=[b_1\ b_2\ b_3\ b_4]^{\mathrm{T}}$. 因 A 為 invertible, 故由 Theorem 3.5.9 知, 對任意實數 b_1,b_2,b_3,b_4, 聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 必有解且其解唯一. 事實上此唯一解為

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=A^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -b_1-b_3-b_4 \\ -3b_1-b_2-b_4 \\ 5b_1+4b_3+3b_4 \\ 3b_1+3b_3+2b_4 \end{bmatrix}.$$