Chapter 4

Linear Transformations

在本章中我們介紹在 vector spaces 之間重要的函數, 所謂的 linear transformation. 我們會介紹 linear transformation 相關的基本性質. 然後引進其矩陣表示法, 將 linear transformation 與矩陣相連結.

4.1. Basic Properties

在數學中, 函數是我們常常利用來了解所要探討的結構的重要工具. 在線性代數中, 我們要探討的結構就是 vector space, 而 linear transformation 就是幫助我們探討及理解 vector spaces 相互之間的關係的重要函數與工具.

4.1.1. Function. 給定 vector spaces V, W. 若有一個從 V 的向量對應到 V 的向量的對應關係, 即對任意 $\mathbf{v} \in V$, 此對應會將 $\mathbf{v}$ 對應到 W 中一個向量 $\mathbf{w}$. 若對每一個 $\mathbf{v} \in V$, 所對應到的 $\mathbf{w}$ 我們用 $T(\mathbf{v})$ 來表示, 我們就用 $T: V \to W$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \in W$, $\forall \mathbf{v} \in V$ 來表示這一個對應關係, 而稱 T 是一個從 V 到 W 的 *function* (函數). 這裡 V 稱為 T 的 *domain* (定義域), 而 W 就稱為 T 的 *codomain* (對應域). 注意依函數的定義, 若 $T: V \to W$ 是一個函數, 則對任意 $\mathbf{v} \in V$, $T(\mathbf{v})$ 一定要是 W 中的一個確定的向量. 也就是說 $T(\mathbf{v}) \in W$, 而且不能一下子令 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, 一下子又改變成 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}'$, 但 $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$, 造成不一致的情形發生. 所以當我們在建構一個新的函數時, 一定要確認這一點. 也就是說, 我們必須說明定出來的函數是 *well-defined*.

另外要注意, 函數的定義中並沒有要求定義域中每一個元素都要對應到不同的元素去. 也就是說若 $T: V \to W$ 是一個函數, 是容許在 V 中有兩個向量 $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$, 但 $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}')$. 若我們多要求定義域中每一個元素都要對應到不同的元素, 即 V 中任意兩相異向量 $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$, 所對應的 $T(\mathbf{v})$ 和 $T(\mathbf{v}')$ 要相異 (即 $T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v}')$), 則我們給這樣的函數一個特殊的名稱, 稱這樣的函數為 *one-to-one* (一對一), 有時也稱為 *injective*. 另外, 函數的定義中也沒有要求對應域中每一個元素都要被對應到. 也就是說若 $T: V \to W$ 是一個函數, 是容許在 W 中有向量 $\mathbf{w}$, 沒有任何 V 的向量會對應到 $\mathbf{w}$ (即不存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$). 若我們多要求對應

域中每一個元素都要被對應到, 即 W 中任意向量 $\mathbf{w}$, 皆可找到 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $T(\mathbf{v})=\mathbf{w}$, 則我們給這樣的函數一個特殊的名稱, 稱這樣的函數為 *onto* (映成), 有時也稱為 *surjective*.

當一個函數是 one-to-one 且 onto (此時一般稱為 *bijective*), 那就更特別了. 這時候一定可以找到一個從原來函數的對應域送到原來函數的定義域的反向函數 (我們稱為原函數的 *inverse* (反函數)), 使其合成後會是將每一個元素自己映射到自己的函數 (即所謂的 identity function). 所以此時我們也稱這樣的函數為 *invertible* (可逆函數).

4.1.2. Linear Transformation. 要了解 vector spaces, 若僅是考慮一般的函數, 並無法利用向量之間的運算, 幫助我們了解這些 vector spaces 中向量的結構. 我們需要的函數是能保持向量運算的, 所以有以下之定義.

Definition 4.1.1. 假設 V,W 皆為 vector space over $\mathbb{F}$ 且 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 為一個函數, 若 T 滿足對任意 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in V$ 以及 $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{F}$ 皆有

$$T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k)=c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_kT(\mathbf{v}_k).$$

則稱 T 為一個 *linear transformation*. 有時我們簡稱 T 為 *linear*.

要注意這裡 $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_1$ 是 V 中向量的線性組合, 而 $c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_kT(\mathbf{v}_k)$ 是 W 中向量的線性組合, 要區分清楚. 尤其在 $V\neq W$ 時要特別注意. 特別是當 $\mathbf{0}\in V$ 是 V 的 zero vector 時, 依 linear transformation 的定義, 我們有 $T(\mathbf{0})=T(\mathbf{0}+\mathbf{0})=T(\mathbf{0})+T(\mathbf{0})$. 此時兩邊加上 $T(\mathbf{0})$ 的加法反元素, 得 $T(\mathbf{0})$ 應為 W 中的 zero vector. 也就是說一個 linear transformation $T:V\to W$, 會將 V 中的零向量映射到 W 中的零向量. 雖然當 $V\neq W$ 時, V 和 W 的零向量有可能是不同的, 不過一般我們都用 $\mathbf{0}$ 來表示, 而不區分它. 所以我們仍用 $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ 來表示 linear transformation 會將 V 中的零向量映射到 W 中的零向量. 這個性質雖然簡單, 但相當有用, 我們特別將此性質敘述如下.

Lemma 4.1.2. 假設 $T:V\to W$ 為一個 *linear transformation*. 則 T 會將 V 中的零向量映射到 W 中的零向量, 亦即 $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

再次提醒, 這裡兩個 $\mathbf{0}$ 哪一個是 V 的零向量, 哪一個是 W 的零向量, 一定要區分清楚.

依定義要檢查 $T:V\to W$ 是否為 linear transformation, 我們必須考慮 V 中任意有限多個向量的線性組合代入 T 中是否符合 linear transformation 的要求, 感覺起來很麻煩. 事實上, 如同檢查 subspace 的方法 (參見 Corollary 2.3.3), 下一個定理告訴我們, 只要檢查任兩個向量的線性組合即可.

Proposition 4.1.3. 假設 V,W 皆為 *vector space over* $\mathbb{F}$ 且 $T:V\to W$ 為一個函數, 則 T 為 *linear transformation* 若且唯若對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $T(\mathbf{u}+r\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+rT(\mathbf{v})$.

Proof. $(\Rightarrow)$: 依 T 為 linear 的定義, 對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $T(\mathbf{u}+r\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+rT(\mathbf{v})$.

$(\Leftarrow)$: 我們要利用對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$, $r\in\mathbb{F}$ 皆有 $T(\mathbf{u}+r\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+rT(\mathbf{v})$ 這個性質來證明對任意 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in V$ 以及 $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{F}$ 皆有 $T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k)=c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_kT(\mathbf{v}_k)$.

我們對向量的個數 k 作數學歸納法. 首先考慮只有一個向量的情形 (即 $k=1$), 我們要證明若 $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$, $c_1 \in \mathbb{R}$ 則 $T(c_1\mathbf{v}_1) = c_1T(\mathbf{v}_1)$. 此時考慮 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$, $r = c_1$, 依 Lemma 4.1.2, 我們有 $T(c_1\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + rT(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1)$. 得證 $k=1$ 的情形成立. 現假設有 k 個向量時成立, 亦即對任意 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k \in V$ 以及 $c_1,\ldots,c_k \in \mathbb{F}$ 皆有 $T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k) = c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_kT(\mathbf{v}_k)$. 我們要證明對任意 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_{k+1} \in V$ 以及 $c_1,\ldots,c_k,c_{k+1} \in \mathbb{F}$ 皆有 $T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k+c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) = c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_kT(\mathbf{v}_k)+c_{k+1}T(\mathbf{v}_{k+1})$. 然而對此時令 $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{k+1}$ 以及 $r = c_{k+1}$. 依歸納假設我們有 $T(\mathbf{u}) = c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_kT(\mathbf{v}_k)$, 故

$$\begin{aligned} &T(c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k+c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) = \\ &\qquad T(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})+rT(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1)+\cdots+c_kT(\mathbf{v}_k)+c_{k+1}T(\mathbf{v}_{k+1}). \end{aligned}$$

故由數學歸納法知 T 為 linear transformation. $\square$

Example 4.1.4. (1) 考慮 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 定義為 $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1-x_3 \end{bmatrix}$. 我們驗證 T 是一個 linear transformation. 任取 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 以及 $r \in \mathbb{R}$. 我們有 $\mathbf{u}+r\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1+rb_1 \\ a_2+rb_2 \\ a_3+rb_3 \end{bmatrix}$. 故依 T 的定義, 我們有

$$T(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = T(\begin{bmatrix} a_1+rb_1 \\ a_2+rb_2 \\ a_3+rb_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} (a_1+rb_1)+(a_2+rb_2) \\ (a_1+rb_1)-(a_3+rb_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2+rb_1+rb_2 \\ a_1-a_3+rb_1-rb_3 \end{bmatrix}.$$

另一方面我們有 $T(\mathbf{u}) = T(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ a_1-a_3 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{v}) = T(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} b_1+b_2 \\ b_1-b_3 \end{bmatrix}$, 故

$$T(\mathbf{u})+rT(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ a_1-a_3 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} b_1+b_2 \\ b_1-b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2+rb_1+rb_2 \\ a_1-a_3+rb_1-rb_3 \end{bmatrix}.$$

得證 $T(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})+rT(\mathbf{v})$, 故 T 為 linear transformation.

(2) 考慮 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 定義為 $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1+x_2+1 \\ x_1-x_3 \end{bmatrix}$. 我們說明 T 不是 linear transformation. 依 T 的定義, 我們有 $T(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$, 故由 Lemma 4.1.2 知, T 不是 linear transformation.

(3) 考慮 $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 定義為 $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1^2+x_2 \\ x_1-x_3 \end{bmatrix}$. 我們說明 T 不是 linear transformation. 雖然此時 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, 但 $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 而 $T(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ 得

$$T(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = T(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) \neq 2T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}).$$

此與 linear transformation 的條件不符, 故 T 不是 linear transformation.

接下來我們來看一個最常見的 linear transformation, 事實上以後我們會知道所有 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 linear transformation 都是這樣的形式.

Lemma 4.1.5. *假設 $\mathbb{F}$ 為 field 且 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. 考慮 $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ 定義為: $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$. 則 T 為一個 linear transformation.*

Proof. 首先我們先檢查 T 是 well-defined, 也就是說 T 確實是一個從 $\mathbb{F}^n$ 映到 $\mathbb{F}^m$ 的函數. 任取 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$, 依定義 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. 然而 A 為 $m\times n$ matrix, 依矩陣乘法定義 $A\mathbf{v}$ 是一個 $m\times 1$ matrix (注意這裡向量都視為 column vector, 所以 $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ 為 $n\times 1$ matrix), 故 $A\mathbf{v} \in \mathbb{F}^m$. 得 T 確實是一個從 $\mathbb{F}^n$ 到 $\mathbb{F}^m$ 的 function.

現要證明 T 為 linear, 亦即對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ 以及 $r \in \mathbb{F}$, 我們要證明 $T(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})+rT(\mathbf{v})$. 不過依 T 的定義 $T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, 而 $T(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}+r\mathbf{v})$. 故依矩陣乘法加法的分配律 (Proposition 3.1.9 和 Proposition 3.1.10) 我們得

$$T(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = A\mathbf{u}+A(r\mathbf{v}) = A\mathbf{u}+rA\mathbf{v} = T(\mathbf{u})+rT(\mathbf{v}).$$

□

從 Lemma 4.1.5 我們知道可以造出許多的 linear transformations. 事實上, 我們可以利用現有的 linear transformations 造出更多的 linear transformations. 首先若 T_1,T_2 皆為 $\mathbb{F}^n$ 到 W 的 linear transformation, 我們可以利用 T_1,T_2 造出新的 linear transformation, T_1+T_2. 前面已說過, 要造出新的函數需先說明定義域和對應域是甚麼. 這裡我們定義 T_1+T_2 仍為 V 到 W 的函數. 對於任意 $\mathbf{v} \in V$, 我們定義 $(T_1+T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{v})+T_2(\mathbf{v})$. 依此定義, T_1+T_2 確實將 V 的向量映射到 W 中. 這是因為依假設, 對任意 $\mathbf{v} \in V$, 我們有 $T_1(\mathbf{v}) \in W$ 以及 $T_2(\mathbf{v}) \in W$, 所以自然有 $(T_1+T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{v})+T_2(\mathbf{v}) \in W$. 所以 $T_1+T_2 : V \to W$ 確實是 well-defined function. 接下來我們要說明若 $T_1 : V \to W$, $T_2 : V \to W$ 皆為 linear transformation, 則 $T_1+T_2 : V \to W$ 亦為 linear transformation. 也就是說對於任意 $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ 以及 $r \in \mathbb{F}$, 我們要證明 $(T_1+T_2)(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = (T_1+T_2)(\mathbf{u})+r(T_1+T_2)(\mathbf{v})$. 首先依定義我們有

$$(T_1+T_2)(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{u}+r\mathbf{v})+T_2(\mathbf{u}+r\mathbf{v}).$$

接著利用 T_1,T_2 為 linear 我們得

$$T_1(\mathbf{u}+r\mathbf{v})+T_2(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{u})+rT_1(\mathbf{v})+T_2(\mathbf{u})+rT_2(\mathbf{v}).$$

另外, 依定義

$$(T_1+T_2)(\mathbf{u})+r(T_1+T_2)(\mathbf{v}) = T_1(\mathbf{u})+T_2(\mathbf{u})+r(T_1(\mathbf{v})+T_2(\mathbf{v})),$$

故由向量運算性質, 得證 $(T_1+T_2)(\mathbf{u}+r\mathbf{v}) = (T_1+T_2)(\mathbf{u})+r(T_1+T_2)(\mathbf{v})$, 亦即 T_1+T_2 為 V 到 W 的 linear transformation.

Question 4.1. *若 A_1,A_2 皆為 $m\times n$ matrix. 考慮 $T_1 : V \to W$, $T_2 : V \to W$, 分別定義為 $T_1(\mathbf{v}) = A_1\mathbf{v}$, $T_2(\mathbf{v}) = A_2\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$. 則 T_1+T_2 是怎樣的函數?*

給定一個 linear transformation $T: V \to W$, 以及 $c \in \mathbb{F}$, 我們也可定義函數 $cT: V \to W$, 其定義為 $(cT)(\mathbf{v}) = c(T(\mathbf{v}))$, $\forall \mathbf{v} \in V$ (也就是說它把每一個 V 的向量 $\mathbf{v}$ 對應到 c 倍的 $T(\mathbf{v})$). 很容易看出 $rT: V \to W$ 確實是一個 function. 事實上, 它也是 linear transformation. 這是因為對於任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 以及 $r \in \mathbb{F}$, 我們有

$$(cT)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = c(T(\mathbf{u} + r\mathbf{v})) = cT(\mathbf{u}) + rcT(\mathbf{v}).$$

而 $(cT)(\mathbf{u}) + r(cT)(\mathbf{v}) = c(T(\mathbf{u})) + rc(T(\mathbf{v}))$, 故知 $(cT)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = (cT)(\mathbf{u}) + r(cT)(\mathbf{v})$, 得證 $cT: V \to W$ 為 linear transformation.

Question 4.2. 設 A 為 $m \times n$ *matrix.* 考慮 $T: V \to W$ 定義為 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$. 則對於 $c \in \mathbb{F}$, cT 是怎樣的函數?

設 $T_1, \cdots, T_k$ 為 V 到 W 的 linear transformations. $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{F}$, 則由前知 $c_1T_1, \ldots, c_kT_k$ 皆為 V 到 W 的 linear transformations. 所以 $c_1T_2 + c_2T_2$ 為 linear transformation. 再利用數學歸納法, 得 $c_1T_1 + \cdots + c_kT_k$ 為 linear transformation. 因此我們有下面之結果.

Proposition 4.1.6. 設 $T_1, \cdots, T_k$ 為 V 到 W 的 *linear transformations,* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{F}$ 則 $c_1T_1 + \cdots + c_kT_k$ 為 V 到 W 的 *linear transformation.*

另一個產生 linear transformation 的方法就是利用 "合成函數". 若 U, V, W 為 vector spaces 且 $T: U \to V$ 和 $T': V \to W$ 為函數, 由於對任意 $\mathbf{u} \in U$, 依定義 $T(\mathbf{u}) \in V$, 也就是說 $T(\mathbf{u})$ 會落在 T' 的定義域中. 所以我們可以將 $T(\mathbf{u})$ 代入 T' 中, 亦即得 $T'(T(\mathbf{u})) \in W$. 這樣的方法幫我們定義出一個從 U 到 W 的函數, 稱之為 T, T' 的 *composite function* (合成函數), 我們用 $T' \circ T$ 來表示. 也就是說 $T' \circ T: U \to W$ 的定義為 $T' \circ T(\mathbf{u}) = T'(T(\mathbf{u}))$, $\forall \mathbf{u} \in U$. 我們有下面之結果.

Proposition 4.1.7. 假設 $T: U \to V$ 和 $T': V \to W$ 為 *linear transformation,* 則 $T' \circ T: U \to W$ 亦為 *linear transformation.*

Proof. 已知 $T' \circ T$ 為 function, 我們僅要證明 $T' \circ T$ 為 linear, 亦即對於任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ 以及 $r \in \mathbb{R}$, 我們有 $(T' \circ T)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = (T' \circ T)(\mathbf{u}) + r(T' \circ T)(\mathbf{v})$. 依定義 $(T' \circ T)(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T'(T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}))$. 然而因為 T, T' 為 linear, 故有

$$T'(T(\mathbf{u} + r\mathbf{v})) = T'(T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})) = T'(T(\mathbf{u})) + rT'(T(\mathbf{v})).$$

再由 $T'(T(\mathbf{u})) = (T' \circ T)(\mathbf{u})$ 以及 $T'(T(\mathbf{v})) = (T' \circ T)(\mathbf{v})$ 得證 $T' \circ T$ 為 linear transformation. □

Question 4.3. 設 A 為 $m \times n$ *matrix,* B 為 $k \times m$ *matrix.* 考慮 $T: U \to V$, $T': V \to W$, 分別定義為 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in U$ 且 $T'(\mathbf{w}) = B\mathbf{w}$, $\forall \mathbf{w} \in V$. 則 $T' \circ T$ 是怎樣的函數?

當 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一組 basis 時, 對任意 $\mathbf{v} \in V$, 皆存在唯一的一組 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. 現若 $T: V \to W$ 是 linear transformation, 則由 linear transformation 定義知, 此時 $T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$. 也就是說, 只要我們知道 $T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$ 是 W 中的哪些向量, 則對於任意 $\mathbf{v} \in V$, 我們都可以知道 $T(\mathbf{v})$ 為何. 因此我們有以下的定理.

Theorem 4.1.8. *假設 V,W 為 vector spaces over $\mathbb{F}$ 且 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in V$, 為 V 的一組 basis. 令 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n \in W$, 則存在唯一的 linear transformation $T : V \to W$, 滿足 $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1,\ldots,T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i,\ldots,T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.*

Proof. 首先證明存在性. 定義 $T : V \to W$ 為 $T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$, $\forall c_1,\ldots,c_n \in F$. 我們需說明這是 well-defined function. 也就是說對任意 $\mathbf{v} \in V$, $T(\mathbf{v})$ 皆有定義且 $T(\mathbf{v}) \in W$. 然而因 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$, 為 V 的一組 basis, 故存在唯一的一組 $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{F}$, 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. 故此時得 $T(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n \in W$. 接著我們要說明 T 為 linear transformation, 也就是說對任意 $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ 以及 $r \in \mathbb{F}$, 我們要證明 $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})$. 由於 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 為 V 的一組 basis, 存在 $c_1,\ldots,c_n$ 以及 $d_1,\ldots,d_n \in \mathbb{F}$ 使得 $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$ 且 $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n$. 故此時 $\mathbf{u} + r\mathbf{v} = (c_1 + rd_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (c_n + rd_n)\mathbf{v}_n$. 依 T 的定義得

$$T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = (c_1 + rd_1)T(\mathbf{v}_1) + \cdots + (c_n + rd_n)T(\mathbf{v}_n) = (c_1 + rd_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (c_n + rd_n)\mathbf{w}_n.$$

另一方面

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) + rT(d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n) = \\ (c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n) + r(d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_n\mathbf{w}_n) = (c_1 + rd_1)\mathbf{w}_1 + \cdots + (c_n + rd_n)\mathbf{w}_n. \end{aligned}$$

得證 $T(\mathbf{u} + r\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + rT(\mathbf{v})$.

接著證明唯一性, 我們用反證法. 也就是說若 $T' : V \to W$ 是另一個 linear transformation 滿足 $T'(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1,\ldots,T'(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$, 且 $T' \neq T$, 則會造成矛盾. 依定義, $T' \neq T$ 表示存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $T'(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v})$. 此時因存在 $c_1,\ldots,c_n$, 使得 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, 故依 T,T' 皆為 linear 的假設, 我們有

$$T'(\mathbf{v}) = T'(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T'(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_nT'(\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{w}_1 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = T(\mathbf{v}).$$

此與 $T'(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v})$ 相矛盾, 證得唯一性. □

要注意 Theorem 4.1.8 中的 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_n \in W$ 是可以任意選取的, 不需要是一組 basis 或是 linear independent. 這個定理, 再次讓我們確定 basis 的重要性. 它告訴我們給定 V 的一組 basis 後, 我們可以將這組 basis 裡的向量對應到 W 中任意的向量, 就會得到一個 V 到 W 的 linear transformation. 更重要的是, 一般來講兩個函數要說明它們是相等的, 我們必須檢查定義域裡的每個元素是否被這兩個函數對應到對應域裡相同的元素. 這個過程是很複雜的, 因為一般來說定義域裡的元素有無窮多個, 我們無法一個一個檢查. 但是 linear transformation 就有這個好處, Theorem 4.1.8 告訴我們僅要檢查兩個 linear transformations 在一組 basis 裡中的那些有限多個向量是一致的, 那麼這兩個 linear transformation 事實上就會是相同的函數.