Chapter 5

Determinant

這一章我們將介紹 determinant (行列式). 對於一個 $n \times n$ matrix, 我們將它的行列式視為其 row vectors 所張成的平行多面體的 "有向體積". 利用這個看法, 我們探討 determinant 應有的性質, 再利用這些性質來得到 determinant 的定義. 這一章中, 我們探討的 $\mathbb{R}^n$ 向量大多以 row vector 來表示, 除非與矩陣乘法有關才會用 column vector 來表示.

5.1. Signed Area in $\mathbb{R}^2$ and Properties of Determinant Function

我們都知道當 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, 令 $\mathbf{u} = (a,b)$, $\mathbf{v} = (c,d)$. 此時 $\det(A) = ad - bc$ 的絕對值會是 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張成的平行四邊形的面積. 而 $\det(A)$ 為正的表示 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 的逆時針方向 (也就是說將 $\mathbf{u}$ 逆時鐘旋轉某個小於 180° 的角度後會與 $\mathbf{v}$ 平行). 反之, $\det(A)$ 為負的表示 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 的順時針方向. 因此 $\det(A)$ 不只告訴我們有關於 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張成的平行四邊形的面積, 且告訴我們 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 之間的方向性. 因此我們稱 $\det(A)$ 為 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所張成的平行四邊形的 *signed area*.

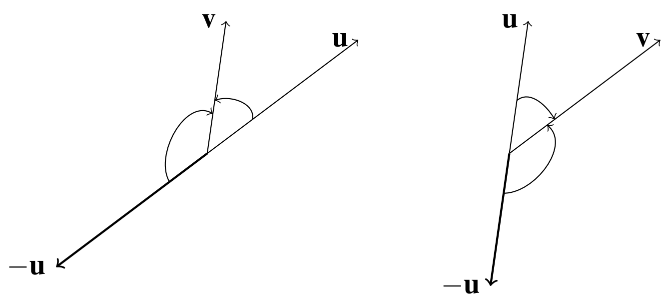
我們希望將此推廣到 $n \times n$ matrix. 也就是說當 $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, 令 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ 依序為 A 的 row vectors. 我們希望能定義 $\det(A)$ 使其值為 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 所張成的 "平行多面體" 的 *signed volume*. 也就是說, 希望 $\det(A)$ 的絕對值表示 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 所張成的 "平行多面體" 的體積, 而其正負號表示的是 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的方向性. 或許大家會疑惑? 當 $n \geq 4$ 時, $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量所張的 "平行多面體" 是什麼樣子都不知道, 要如何去說它的體積呢? 沒錯, 我們就是希望能延伸 $\mathbb{R}^2$ 的平行四邊形面積的概念到 $\mathbb{R}^3$ 的平行六面體體積. 然後希望能一直延伸下去定義出一般 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量所張的平行多面體的體積. 簡言之, 我們想利用預期一個體積應該符合哪些性質的方法, 來定義出體積. 所以接下來的工作就是列出幾個和 signed area 相關的性質, 希望能定義出 determinant (行列式) 這一個從 $\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 到 $\mathbb{R}$ 的函數 (用 det 表示), 使得它符合這些性質.

首先我們要定義體積, 應該先定義單位體積為何才能確定體積. 在 $\mathbb{R}^2$ 中我們是因為定義了 $(1,0),(0,1)$ 所張的平行四邊形 (其實是正方形) 的面積為 1, 才得到其他平行四邊形的面積. 又 $(1,0)$ 到 $(0,1)$ 確實是逆時鐘轉 $\pi/2$, 依前面的方向性應為正向. 所以 $\det(I_2) = 1$ 確實符合我們要求 $(1,0),(0,1)$ 所張的平行四邊形的面積為 1 且為正向的要求. 因此要決定 $\mathbb{R}^n$

中的單位體積, 很自然的我們會定其 standard basis $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 所張的平行多面體的體積為 1, 且要求 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 這樣的方向性就是正向. 也就是說我們希望 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ 所張的平行多面體的 signed volume 為 1, 亦即我們定 $\det(I_n)=1$.

至於一般 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的方向性怎麼定呢? 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為正向, 表示 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 的逆時鐘方向. 此時 $\mathbf{v},\mathbf{u}$ 就是負向, 因為 $\mathbf{u}$ 在 $\mathbf{v}$ 的順時鐘方向. 而 2×2 的 determinant $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=ad-bc=-(bc-ad)=-\det\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ 也符合這個性質. 因此我們認為 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$, 若將其中兩個相鄰向量 $\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_{i+1}$ 變換順序就會改變方向性. 也就是說當 $A\in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, 若將 A 的相鄰兩個 row 交換所得的矩陣為 A', 則我們要求 $\det(A')=-\det(A)$.

另一個改變 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 的方向性的可能就是將其中一個 $\mathbf{v}_i$ 改為 $-\mathbf{v}_i$. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中, 若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為正向, 則 $-\mathbf{u},\mathbf{v}$ 就是負向. 反之, 若 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 為負向, 則 $-\mathbf{u},\mathbf{v}$ 就是正向. 如下圖所示:



而 2×2 的 determinant

$$\det\begin{bmatrix} -a & -b \\ c & d \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a & b \\ -c & -d \end{bmatrix}=-ad+bc=-(ad-bc)=-\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

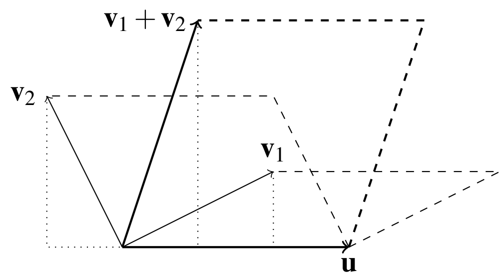
也符合這個性質. 因此我們認為 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$, 若將其中一個 $\mathbf{v}_i$ 改為 $-\mathbf{v}_i$ 就會改變方向性. 也就是說當 $A\in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, 若將 A 的某個 row 乘上 -1 所得的矩陣為 A', 則我們要求 $\det(A')=-\det(A)$.

至於體積我們希望有怎樣的性質呢? 首先若 r 為一個正實數, 平行多邊形若有一邊為原來的 r 倍, 我們認為其體積應也會隨之改變為原來的 r 倍. 而 2×2 的 determinant

$$\det\begin{bmatrix} ra & rb \\ c & d \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} a & b \\ rc & rd \end{bmatrix}=rad-rbc=r(ad-bc)=r\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

也符合這個性質. 因此我們認為當 $r>0$, $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$, 若將其中一個 $\mathbf{v}_i$ 改為 $r\mathbf{v}_i$ 就會改變其體積為原來的 r 倍. 也就是說當 $r>0$, 若將 $A\in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的某個 row 乘上 r 所得的矩陣為 A', 則我們要求 $\det(A')=r\det(A)$. 而若將 A 的某個 row 乘上 $-r$ 所得的矩陣為 A'', 我們可視為將該 row 先乘上 r 得到 A' 再在 A' 的該 row 乘上 -1, 所以我們要求 $\det(A'')=-\det(A')=-r\det(A)$. 換言之, 不管 r 是正實數或負實數, 若將 A 的某個 row 乘上 r 所得的矩陣為 A', 則我們都要求 $\det(A')=r\det(A)$.

最後如果 $\mathbb{R}^n$ 中 n 個向量 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 將其中一個向量 $\mathbf{v}_i$ 拆成兩個向量之和, 即 $\mathbf{v}_i=\mathbf{w}_i+\mathbf{w}'_i$, 則我們認為 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_i,\dots,\mathbf{v}_n$ 所張成的平行多面體其有向體積應為 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{w}_i,\dots,\mathbf{v}_n$ 所形成的平行多面體和 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{w}'_i,\dots,\mathbf{v}_n$ 所形成的平行多面體的有向體積之和. 例如在 $\mathbb{R}^2$ 中下圖所示:



注意這裡以 $\mathbf{u}$ 為底, $\mathbf{u},\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$ 所張的平行四邊形的高為 $\mathbf{u},\mathbf{v}_1$ 所張的平行四邊形和 $\mathbf{u},\mathbf{v}_2$ 所張的平行四邊形的高之和. 而 2×2 的 determinant

$$\det\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{bmatrix} =$$
$$(a+a')d-(b+b')c=(ad-bc)+(a'd-b'c)=\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} a' & b' \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix} =$$
$$a(d+d')-b(c+c')=(ad-bc)+(ad'-bc')=\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} a & b \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

也符合這個性質. 因此我們要求當 A,B,C 三個 $n\times n$ matrix, 其中 A 的 i-th row 是 B 和 C 的 i-th row 之和, 而 A,B,C 其他各 row 皆相等時, $\det(A)=\det(B)+\det(C)$.

我們將上述討論所希望 determinant 應具有的性質總結如下:

(1) $\det(I_n)=1$.

(2) 若將 $n\times n$ matrix A 某相鄰兩個 row 交換所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=-\det(A)$.

(3) 若將 $n\times n$ matrix A 某個 row 乘上非零實數 r 所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=r\det(A)$.

(4) 若 A,B,C 三個 $n\times n$ matrix, 其中 A 的 i-th row 是 B 和 C 的 i-th row 之和, 而 A,B,C 其他各 row 皆相等, 則 $\det(A)=\det(B)+\det(C)$.

注意 (2) 這個性質稱為 determinant 的 *alternating* 性質; 而 (3), (4) 兩個性質, 我們通稱為 determinant 的 *multi-linear* 性質. 千萬不要搞錯, 它並不是說若 $A=B+rC$ 則 $\det(A)=\det(B)+r\det(C)$, 而是說僅有一個 row 寫成線性組合而其他 row 固定不動的情況之下, determinant 可保持該 row 線性組合的關係. 其大致的圖示如下

$$\det\begin{bmatrix} -\mathbf{v}_1- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_i+r\mathbf{v}_i'- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_n- \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} -\mathbf{v}_1- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_i- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_n- \end{bmatrix}+r\det\begin{bmatrix} -\mathbf{v}_1- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_i'- \\ \vdots \\ -\mathbf{v}_n- \end{bmatrix}.$$

Question 5.1. 試利用 *determinant multi-linear* 的性質將 $\det\begin{bmatrix} ra_1+sa_2 & rb_1+sb_2 \\ tc_1+uc_2 & td_1+ud_2 \end{bmatrix}$ 寫成 $\det\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_j & d_j \end{bmatrix}$ 的線性組合.

5.2. Uniqueness of the Determinant Function

上一節中我們給了 det 這個函數預期應該擁有的性質, 但是我們不知道這樣的函數存不存在. 因為或許這些性質要求太多, 會互相抵觸造成符合這些性質的函數根本不存在. 也有可能這些性質要求太少, 以至於有很多函數可以符合這些性質. 這一節中我們將探討, 若符合這些性質的函數存在的話, 那它會是唯一的. 也就是說, 不管怎麼去定這個函數, 如果定出的函數真能符合我們要求的性質, 那它一定就是唯一的那一個.

或許大家會疑惑, 連這個函數存不存在都不知道, 為何要先探討它的唯一性呢? 其實我們在處理數學問題時經常是這樣做的. 例如在解方程式時, 我們都是先假設其解存在, 然後再利用等量公理等方法解出其解可能為那些, 再將這些可能的值代回原方程式看看是否符合, 然後才找到真正的解. 也就是說, 我們不可能將所有的數都代入方程式來找解, 而解方程式的過程是利用若有解的話其解需要具備的性質幫我們縮小範圍找出真正的解來. 現在我們也是一樣, 想先由前一節列出的性質去推導出更多的性質, 然後得到符合這些性質的函數若存在的話僅有一個, 再由此得到這個函數可能的形式, 然後回過來驗證它真的符合我們要的性質.

要注意在本節中, 由於尚未證明 det 是存在的, 所以我們推導出來的性質都是在 det 存在的假設情況才會成立. 從邏輯的角度來看, 這裡推導出來的每個敘述之前都要加上“若 det 存在”這樣的假設條件. 不過以後我們將會證明 det 確實存在, 所以這些敘述事實上是正確的. 因此為了方便起見, 我們都略去“若 det 存在”這樣的假設條件.

首先我們探討 det 在 elementary row operation 之下其取質如何改變. 在 det 要求的性質 (2) 中我們要求當 A 的某相鄰兩個 row 交換其行列式值要變號. 其實這對 A 的任兩個 row 交換也會成立. 這是因為我們可以利用相鄰兩個 row 互換的方法將 A 的 i-th row 和 j-th row 交換. 例如 3-th row 和 6-th row 互換的動作, 我們先從上而下的先將 3-rd 和 4-th row 交換, 然後 4-th 和 5-th row 交換, 這樣一直到將原本的 3-rd row 換到 6-th row 的位置. 此時共做了 $6-3=3$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作圖示如下:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_3- \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_6- \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_3- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_6- \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_3- \\ -\mathbf{v}_6- \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_6- \\ -\mathbf{v}_3- \\ \vdots \end{bmatrix}$$

接著我們從下而上的將 5-th 和 4-th row 交換 (即原本 6-rd 已到達 4-th row 的位置), 最後將 4-th 和 3-rd row 交換將原本的 6-th row 換到 3-rd row 的位置. 此時共做了 $5-3=2$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作圖示如下:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_6- \\ -\mathbf{v}_3- \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_6- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_3- \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \vdots \\ -\mathbf{v}_6- \\ -\mathbf{v}_4- \\ -\mathbf{v}_5- \\ -\mathbf{v}_3- \\ \vdots \end{bmatrix}$$

在一般的情況, 不失一般性假設 $i<j$, 我們可以先將 A 的 i-th row 和 $i+1$-th row 互換, 接著將 $i+1$-th row 和 $i+2$-th row 互換, 這樣一直下去直到將原本 i-th row 換到 j-th row. 注意此時原本 $i+1$-th row 到 j-th row 其實都只是往上移一個 row, 而我們共做了 $j-i$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作. 接下來從 $j-1$-th row 開始, 先和 $j-2$-th row 交換 (此時原本的 j-th row 已換到 $j-2$-th row), 然後再依序往上用相鄰兩 row 互換的方法將原本的 j-th row 換到 i-th row. 這次由下往上互換的動作從 $j-1$-th row 和 $j-2$-th row 交換一直到 $i+1$-th row 和 i-th row 交換共做了 $(j-1)-i$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作. 所以從上而下再從下而上完成將 i-th row 和 j-th row 互換共做了 $(j-1-i)+(j-i)=2(j-i)+1$ 次的相鄰兩個 row 互換的動作. 由於每做一次相鄰兩 row 互換 det 會變一次號, 而 $2(j-1)+1$ 為奇數, 故最後 det 還是要變號. 我們推得了以下的性質.

Lemma 5.2.1. *假設 A 為 $n\times n$ matrix. 若將 A 任兩個 row 交換所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=-\det(A)$.*

回顧一下, 將 A 的 i-th 和 j-th row 交換這樣的 elementary row operation 所得的矩陣其實是將 A 的左邊乘上一個 elementary matrix E. 而 E 就是將 identity matrix I_n 的 i-th 和 j-th row 交換. 所以依 Lemma 5.2.1, 我們有 $\det(E)=-\det(I_n)$. 而 det 的性質 (1) 告訴我們 $\det(I_n)=1$, 因此得 $\det(E)=-1$. 又 Lemma 5.2.1 說將 A 的 i-th 和 j-th row 交換所得的矩陣 EA 其行列式為 $-\det(A)$, 因此若 E 為將 i-th 和 j-th row 交換這樣的 elementary row operation 所對應的 elementary matrix, 則 $\det(EA)=-\det(A)=\det(E)\det(A)$.

利用 Lemma 5.2.1, 如果 det 這個函數存在的話, 我們可以推得以下簡單的性質.

Lemma 5.2.2. *假設 A 為 $n\times n$ matrix 且 A 中有兩個 row 是相等的. 則 $\det(A)=0$.*

Proof. 假設 A 的 i-th row 和 j-th row 是相等的. 此時若將 A 的 i-th 和 j-th row 交換所得的矩陣為 A', 則由 Lemma 5.2.1 可得 $\det(A')=-\det(A)$. 但又 $A'=A$, 所以依 det 是一個函數 (之假設) 知 $\det(A)=\det(A')$. 故由 $\det(A)=\det(A')=-\det(A)$ 得證 $\det(A)=0$. □

第二種 elementary row operation 是將矩陣的某個 row 乘上一個非零實數. 這一個 elementary row operation 對行列式的影響其實就是我們要求 det 的性質 (3). 同樣的, 利用這一個 elementary row operation 將 A 的 i-th row 乘上一個非零實數 r 所得的矩陣就是將 A 的左邊乘上一個 elementary matrix E. 而 E 就是將 identity matrix I_n 的 i-th row 乘上 r. 因此依 det 的性質 (1)(3), 我們有此時 $\det(E)=r\det(I_n)=r$. 而性質 (3) 又要求 $\det(EA)=r\det(A)$, 故此時我們依然有 $\det(EA)=r\det(A)=\det(E)\det(A)$. 利用這個性質以及 det 這個函數存在的假設, 我們可以推得以下簡單的性質.

Lemma 5.2.3. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix* 且 A 中有一個 *row* 全為 0. 則 $\det(A)=0$.

Proof. 假設 A 的 i-th row 全為 0. 此時若將 A 的 i-th 乘上 2 所得的矩陣為 A', 則由 det 的性質 (3) 得 $\det(A')=2\det(A)$. 但又 $A'=A$, 所以依 det 是一個函數 (之假設) 知 $\det(A)=\det(A')$. 故由 $\det(A)=\det(A')=2\det(A)$ 得證 $\det(A)=0$. □

第三種 elementary row operation 是將矩陣的某個 row 乘上非零實數 r 加到另一個 row. 現假設 A 為 $n\times n$ matrix 且設 A 的 k-th row 為 $\mathbf{v}_k$, for $k=1,\dots,n$. 令將 A 的 i-th row 乘上 r 加到 j-th row 所得的矩陣為 A', 則 A' 的 j-th row 為 $\mathbf{v}_j+r\mathbf{v}_i$, 而 A' 的 k-th row 仍為 $\mathbf{v}_k$, for $k\neq j$. 另外令 B 為 $n\times n$ matrix 其 j-th row 為 $\mathbf{v}_i$, 而 k-th row 為 $\mathbf{v}_k$, for $k\neq j$. 則依 det multi-linear 的性質 (即性質 (3) (4)), 我們有 $\det(A')=\det(A)+r\det(B)$. 但 B 的 i-th row 和 j-th row 皆為 $\mathbf{v}_i$, 故由 Lemma 5.2.2 知 $\det(B)=0$. 得知 $\det(A')=\det(A)$, 因此我們有以下的性質.

Lemma 5.2.4. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix.* 若將 A 的 *i-th row* 乘上 r 加到 *j-th row* 所得的矩陣為 A', 則 $\det(A')=\det(A)$.

同樣的, 將 A 的 i-th row 乘上非零實數 r 加到 j-th row 這樣的 elementary row operation 所得的矩陣其實是將 A 的左邊乘上一個 elementary matrix E. 而 E 就是將 identity matrix I_n 的 i-th row 乘上非零實數 r 加到 j-th row. 所以依 Lemma 5.2.4, 我們有 $\det(E)=\det(I_n)=1$ 且 $\det(EA)=\det(A)$. 因此若 E 為將 i-th row 乘上非零實數 r 加到 j-th row 這樣的 elementary row operation 所對應的 elementary matrix, 則 $\det(EA)=\det(A)=\det(E)\det(A)$.

結合上面三種 elementary row operations 對 det 的影響, 我們得到以下重要的定理.

Theorem 5.2.5. 假設 A 為 $n\times n$ *matrix.* 若 E 為 *elementary matrix,* 則

$$\det(EA)=\det(E)\det(A).$$

Theorem 5.2.5 是 determinant 一個非常重要的性質, 它可以幫我們推導出許多有關於 determinant 的性質. 首先要注意的是三種 elementary row operations 所對應的 elementary matrices 它們的 determinant 皆不為 0, 回顧一下它們的 determinant 分別如下:

(1) 對於兩 row 交換的 elementary matrix E, 我們有 $\det(E)=-1$.

(2) 對於某個 row 乘上非零實數 r 的 elementary matrix E, 我們有 $\det(E)=r$.

(3) 對於某個 row 乘上非零實數 r 加到另一個 row 的 elementary matrix E, 我們有 $\det(E)=1$.

另外, 若 E_1,E_2 為 elementary matrices, 由 Theorem 5.2.5 我們有

$$\det(E_2E_1A)=\det(E_2(E_1A))=\det(E_2)\det(E_1A)=\det(E_2)\det(E_1)\det(A).$$

依數學歸納法可得, 若 $E_1,\dots,E_k$ 為 elementary matrices, 則

$$\det(E_k\cdots E_1A)==\det(E_k)\cdots\det(E_1)\det(A). \tag{5.1}$$

利用這些 elementary matrices 的 determinant, 我們有以下關於 determinant 的重要性質.

Theorem 5.2.6. 假設 A,B 為 $n\times n$ *matrices.*

(1) A 為 *invertible* 若且唯若 $\det(A)\neq 0$.

(2) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

(3) $\det(A^{\mathrm{t}})=\det(A)$.

Proof. (1) 假設 A 不是 invertible 表示 A 經過 elementary row operations 所得 echelon form A' 其 pivot 的個數會小於 n, 即 $\operatorname{rank}(A)<n$ (參見 Theorem 3.5.2). 因為 A' 的 pivot 的個數小於 n, 所以 A' 的最後一個 row (即 n-th row) 全為 0. 故由 Lemma 5.2.3 知 $\det(A')=0$. 然而我們知存在 elementary matrices $E_1,\dots,E_k$ 使得 $A'=E_k\cdots E_1A$, 故由式子 (5.1) 知 $\det(A')=\det(E_k)\cdots\det(E_1)\det(A)$. 又 elementary matrices 的 determinants $\det(E_1),\dots,\det(E_k)$ 皆不為 0, 故由 $\det(A')=0$ 得證 $\det(A)=0$. 而若 A 為 invertible, 則 A 可以寫成 elementary matrices 的乘積 (參見 Proposition 3.5.7). 故存在 elementary matrices $E_1\dots E_k$ 使得 $A=E_k\cdots E_1$. 因此由式子 (5.1) 知 $\det(A)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)$. 再由 $\det(E_1),\dots,\det(E_k)$ 皆不為 0 得證 $\det(A)\neq 0$.

(2) 若 A 不是 invertible 由 (1) 我們知 $\det(A)=0$. 又此時因 B 也是 $n\times n$ matrix, 我們有 AB 也不是 invertible (參見 Proposition 3.5.5(3)). 故再由 (1) 知 $\det(AB)=0$, 得證 $\det(AB)=0=\det(A)\det(B)$. 現假設 A 為 invertible. 我們知存在 elementary matrices $E_1,\dots,E_k$ 使得 $A=E_k\cdots E_1$. 因此由式子 (5.1) 以及 $\det(A)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)$ 知

$$\det(AB)=\det(E_k\cdots E_1B)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)\det(B)=\det(A)\det(B).$$

(3) 若 A 不是 invertible 由 (1) 我們知 $\det(A)=0$ 且此時 A^{t} 也不是 invertible (參見 Proposition 3.5.5(2)). 故得證 $\det(A^{\mathrm{t}})=0=\det(A)$. 現假設 A 為 invertible. 我們知存在 elementary matrices $E_1,\dots,E_k$ 使得 $A=E_k\cdots E_1$ 且 $A^{\mathrm{t}}=E_1^{\mathrm{t}}\cdots E_k^{\mathrm{t}}$ (參見 Proposition 3.2.4). 由於當 E 為兩 row 交換的 elementary matrix 或是將某個 row 乘上非零實數 r 的 elementary matrix 皆有 $E=E^{\mathrm{t}}$, 而當 E 為將 i-th row 乘上非零實數 r 加到 j-th row 的 elementary matrix 時, E^{t} 為將 j-th row 乘上非零實數 r 加到 i-th row 的 elementary matrix, 故對任意 elementary matrix E 我們皆有 $\det(E)=\det(E^{\mathrm{t}})$. 因此得

$$\det(A^{\mathrm{t}})=\det(E_1^{\mathrm{t}}\cdots E_k^{\mathrm{t}})=\det(E_1^{\mathrm{t}})\cdots\det(E_k^{\mathrm{t}})=\det(E_1)\cdots\det(E_k).$$

最後由於 $n\times n$ matrix 的 determinant 為實數且實數乘法有交換律, 我們有

$$\det(E_1)\cdots\det(E_k)=\det(E_k)\cdots\det(E_1)=\det(A),$$

得證 $\det(A^{\mathrm{t}})=\det(A)$. □