7.7. Application: Conics and Quadric Surfaces

我們將利用 symmetric matrix 是 orthogonal diagonalizable 的特性將坐標平面上的二次曲線以及坐標空間上的二次曲面的方程式化成標準式, 以方便我們判別它們是哪一類的圖形.

一般來說我們是利用平移和旋轉的方法將二次曲線和二次曲面的方程式化成標準式. 其中旋轉的部分牽涉到對角化, 我們首先利用 quadratic form 來談對角化的問題. 所謂 n 個變數的 quadratic form 指的就是形如

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

這樣的二次式. 例如 $x^2+3xy-y^2$, $3x^2+y^2-z^2+5xy+xz+3yz$ 就是分別是兩個變數和三個變數的 quadratic form. 令 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$, 所有 n 個變數的 quadratic form 都可以用矩陣表示成 $\mathbf{x}^{\mathrm{t}}A\mathbf{x}$ 的形式, 其中 A 為 $n\times n$ symmetric matrix. 例如兩個變數的 quadratic form $ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2$ 就可以寫成

$$ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

而三個變數的 quadratic form $ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+rx_1x_2+sx_1x_3+tx_2x_3$ 就可以寫成

$$ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+rx_1x_2+sx_1x_3+tx_2x_3=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & r/2 & s/2\\ r/2 & b & t/2\\ s/2 & t/2 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$$

將 quadratic form 寫成這樣的矩陣表示的好處是因為 A 是 symmetric, 故存在 orthogonal matrix Q 使得 $Q^{\mathrm{t}}AQ$ 為 diagonal matrix $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$. 因此如果我們將變數 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$ 變換成 $\mathbf{t}=\begin{bmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{bmatrix}$ 其中 $\mathbf{t}=Q^{\mathrm{t}}\mathbf{x}$ (注意因 $Q^{\mathrm{t}}=Q^{-1}$, 這等同於令 $\mathbf{x}=Q\mathbf{t}$), 則

$$\mathbf{x}^{\mathrm{t}}A\mathbf{x}=(Q\mathbf{t})^{\mathrm{t}}A(Q\mathbf{t})=\mathbf{t}^{\mathrm{t}}(Q^{\mathrm{t}}AQ)\mathbf{t}=\begin{bmatrix}t_1 & \cdots & t_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{bmatrix}=\lambda_1t_1^2+\cdots+\lambda_nt_n^2.$$

也就是說, 我們可以藉由變換變數將一個 quadratic form 變成只有平方項. 我們看以下的例子.

Example 7.7.1. 考慮 quadratic form $x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2$. 我們先寫下其矩陣形式

$$x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

由於 $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ 為 symmetric matrix, 故為 orthogonal diagonalizable, 事實上我們有

$$\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}.$$

因此若令 $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 則

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = 2t_1^2 - 3t_2^2.$$

對於 quadratic form $x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$, 其矩陣形式為

$$x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

我們曾在 Example 7.6.8 計算過 $Q^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 其中 Q 為 orthogonal matrix $\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. 因此若令 $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 則

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = -t_1^2 + t_2^2 + 2t_3^2.$$

現在我們回到二次曲線的情況. 對於坐標平面上的二次曲線其一般的通式為

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

我們可以將此式表為矩陣形式, 即

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0. \tag{7.6}$$

假設 symmetric matrix $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$ 可對角化成 $Q^tAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. 此時考慮變換變數 $\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = Q^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (也就是 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$), 則式子 (7.6) 可寫成

$$\begin{bmatrix} \overline{x} & \overline{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} + f = 0.$$

寫回方程式的樣子就是

$$\lambda_1\overline{x}^2 + \lambda_2\overline{y}^2 + d'\overline{x} + e'\overline{y} + f = 0, \tag{7.7}$$

其中 $\begin{bmatrix} d' & e' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} Q$.

首先我們考慮 λ_1, λ_2 皆不為 0 的情形, 此時可以利用配方法將式子 (7.7) 改寫成

$$\lambda_1(\overline{x} - h)^2 + \lambda_2(\overline{y} - k)^2 = f'.$$

我們分成下面幾種情形討論.

(A) λ_1, λ_2 同號:

(1) f' 與 λ_1, λ_2 同號: 此時圖形為 *ellipse* (橢圓). 注意當 $\lambda_1 = \lambda_2$ 時會是圓, 不過這裡我們將之視為橢圓的一種.

(2) $f'=0$: 此時很容易看出圖形為 $(\overline{x},\overline{y})=(h,k)$ 這一點.

(3) f' 與 λ_1,λ_2 異號: 此時很容易看出圖形為空集合.

(B) λ_1,λ_2 異號:

(1) $f'\neq 0$: 此時圖形為 *hyperbola* (雙曲線).

(2) $f'=0$: 此時圖形為兩相交直線.

Example 7.7.2. 考慮二次曲線方程式 $2xy+\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=1$. 此方程式可用矩陣表示成

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1.$$

由於

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

考慮變數變換 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}$, 我們得

$$\begin{bmatrix} \overline{x} & \overline{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix}=1.$$

因此此曲線用新的變數其方程式為 $\overline{x}^2-\overline{y}^2+2\overline{x}=1$. 利用配方法得 $(\overline{x}+1)^2-\overline{y}^2=2$, 故其圖形為雙曲線.

同理若原方程式為 $2xy+\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=-1$, 變換變數後的方程式為 $(\overline{x}+1)^2-\overline{y}^2=0$ 其圖形便會是兩相交直線 $\overline{x}+\overline{y}+1=0$ 和 $\overline{x}-\overline{y}+1=0$.

另一種情況是 λ_1,λ_2 其中有一個為 0. 注意 λ_1,λ_2 不可能同時為 0, 否則會是一次方程式. 不失一般性, 我們假設 $\lambda_1\neq 0,\lambda_2=0$ 的情形. 此時可以利用配方法將式子 (7.7) 改寫成

$$\lambda_1(\overline{x}-h)^2+e'\overline{y}=f'.$$

我們分成下面幾種情形討論.

(C) λ_1,λ_2 其中有一個為 0 (不失一般性假設 $\lambda_1\neq 0,\lambda_2=0$):

(1) $e'\neq 0$: 此時圖形為 *parabola* (拋物線).

(2) $e'=0$ 且 λ_1,f' 同號: 此時圖形為兩平行直線 (與直線 $\overline{x}=0$ 平行).

(3) $e'=0$ 且 $f'=0$: 此時圖形為一直線 $\overline{x}=h$.

(4) $e'=0$ 且 λ_1,f' 異號: 此時圖形為空集合.

Example 7.7.3. 考慮二次曲線方程式 $x^2-2xy+y^2+4\sqrt{2}x=4$. 此方程式可用矩陣表示成

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=4.$$

由於

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

考慮變數變換 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$, 我們得

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = 4.$$

因此此曲線用新的變數其方程式為 $2\bar{x}^2 + 4\bar{x} + 4\bar{y} = 4$. 利用配方法得 $2(\bar{x}+1)^2 + 4\bar{y} = 6$, 故其圖形為拋物線.

總而言之, 我們可以從二次曲線的 quadratic form 部分得到其 eigenvalue λ_1, λ_2, 然後由 λ_1, λ_2 的正負號判斷此二次曲線應歸類於哪一種曲線. 若 λ_1, λ_2 同號, 則為橢圓類; 而 λ_1, λ_2 異號, 則為雙曲線類; 而若 λ_1, λ_2 有一個為 0, 則為拋物線類. 不過最後我們還是得經由配方法求得其一次項與常數項, 這樣才能確認此曲線是否為 degenerated (退化) 的情形 (即直線, 點或空集合).

Question 7.14. 假設二次曲線方程式的 *quadratic form* 的部分可表成 $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, 中 A 為 2×2 *symmetric matrix.* 試問是否可由 $\det(A)$ 來判斷此曲線是橢圓類, 雙曲線類還是拋物線類 *(*不考慮退化情形*)?*

對於坐標空間的二次曲面我們也是用同樣方法處理. 首先寫成矩陣的形式

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + f = 0,$$

其中 A 為 3×3 symmetric matrix. 再將 A 對角化然後變換變數成

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \lambda_3 \bar{z}^2 + c'\bar{x} + d'\bar{y} + d'\bar{z} + f = 0. \tag{7.8}$$

二次曲面的分類頗為複雜, 大家不必記下這些分類. 不過為了完整性, 我們還是列出這些分類供同學參考. 由於此處無法利用圖形來解釋, 建議有興趣的同學自行搜尋相關的圖形參考.

首先我們考慮 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 皆不為 0 的情形, 此時可以利用配方法將式子 (7.8) 改寫成

$$\lambda_1(\bar{x}-h)^2 + \lambda_2(\bar{y}-k)^2 + \lambda_3(\bar{z}-l)^2 = f'.$$

我們分成下面幾種情形討論.

(A) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同號:

(1) f' 與 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 同號: 此時曲面為有界的, 且與 $\bar{x} = h$, $\bar{y} = k$ 和 $\bar{z} = l$ 三個平面所交的圖形為橢圓. 曲面有點像橄欖球表面一樣, 我們稱之為 *ellipsoid.* 注意當 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 時會是球面, 不過這裡我們將之視為 ellipsoid 的一種.

(2) $f' = 0$: 此時很容易看出圖形為 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (h, k, l)$ 這一點.

(3) f' 與 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 異號: 此時很容易看出圖形為空集合.

(B) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 異號 (不失一般性假設 λ_1, λ_2 同號):

(1) f' 與 λ_1, λ_2 同號: 此時曲面與 $\bar{z} = l$ 所交的圖形為橢圓, 而分別和 $\bar{x} = h$, $\bar{y} = k$ 所交的圖形為雙曲線. 因為曲面整體上只有一片, 我們稱之為 *hyperboloid* of one sheet.

(2) f' 與 λ_1, λ_2 異號: 此時曲面與平面 $\bar{z} = l$ 不相交, 不過若將平面往上或往下移動夠多的話會交出橢圓. 此曲面分別和 $\bar{x} = h$, $\bar{y} = k$ 所交的圖形為雙曲線. 因為曲面整體上有兩片, 我們稱之為 *hyperboloid* of two sheets.

(3) $f' = 0$: 此時曲面與平面 $\bar{z} = l$ 交於一點, 不過若將平面往上或往下移的話會交出橢圓. 此區面分別和 $\bar{x} = h$, $\bar{y} = k$ 所交的圖形為兩相交直線. 圖形有點像甜筒, 我們稱之為 *elliptic cone.*

另一種情況是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 其中有一個為 0. 注意 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不可能皆為 0, 否則會是一次方程式. 不失一般性, 我們假設 $\lambda_1 \neq 0$. 我們又可分成下面幾種情形討論.

(C) λ_2, λ_3 僅有一個為 0 (不失一般性假設 $\lambda_2 \neq 0$): 此時可以利用配方法將式子 (7.7) 改寫成

$$\lambda_1(\bar{x} - h)^2 + \lambda_2(\bar{y} - k)^2 + e'\bar{z} = f'.$$

(1) $e' \neq 0$ 且 λ_1, λ_2 同號: 此曲面會完全在平面 $e'\bar{z} = f'$ 之上方或下方, 不過若將平面往上或往下移動會交出橢圓. 而此曲面分別與 $\bar{x} = h$, $\bar{y} = k$ 所交的圖形為凹向一致的拋物線. 我們稱之為 *elliptic paraboloid.*

(2) $e' \neq 0$ 且 λ_1, λ_2 異號: 此曲面與平面 $e'\bar{z} = f'$ 交於兩相交直線, 不過若將平面往上或往下移動會交出雙曲線. 此曲面分別與 $\bar{x} = h$, $\bar{y} = k$ 所交的圖形為凹向相反的拋物線. 我們稱之為 *elliptic paraboloid.* 此曲面上的一點 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (h, k, f'/e')$ 就是所謂的 saddle point (鞍點).

(3) $e' = 0$ 且 λ_1, λ_2, f' 同號: 此時曲面與任何的水平平面 $\bar{z} = s$ 所交的圖形為橢圓. 圖形像橢圓柱面, 稱為 *elliptic cylinder.*

(4) $e' = 0$ 且 λ_1, λ_2 異號又 $f' \neq 0$: 此時曲面與任何的水平平面 $\bar{z} = s$ 所交的圖形為雙曲線. 圖形像雙曲柱面, 稱為 *hyperbolic cylinder.*

(5) $e' = 0$ 且 λ_1, λ_2 同號但與 f' 異號: 此時是空集合.

(6) $e' = 0$ 且 λ_1, λ_2 同號又 $f' = 0$: 此時曲面與任何的水平平面 $\bar{z} = s$ 僅交於一點. 圖形為一鉛直線.

(7) $e' = 0$ 且 λ_1, λ_2 異號又 $f' = 0$: 此時曲面與任何的水平平面 $\bar{z} = s$ 交於兩相交直線. 圖形為兩相交平面.

(D) λ_2, λ_3 皆為 0: 此時可以利用配方法將式子 (7.7) 改寫成

$$\lambda_1(\bar{x} - h)^2 + d'\bar{y} + e'\bar{z} = f'.$$

(1) d', e' 不全為 0: 此時令 $r = \sqrt{(d')^2 + (e')^2}$ 利用變換變數

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d'/r & -e'/r \\ 0 & e'/r & d'/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

我們又可將上式改寫成

$$\lambda_1(t_1 - h)^2 + rt_2 = f'.$$

此曲面與任何的水平平面 $t_3 = s$ 所交的圖形為拋物線. 圖形像拋物柱面, 稱為 *parabolic cylinder*.

(2) $d' = e' = 0$ 且 f' 與 λ_1 同號: 此時圖形為兩平行平面 (與 $\bar{x} = 0$ 平行).

(3) $d' = e' = 0$ 且 $f' = 0$: 此時圖形為平面 $\bar{x} = h$.

(4) $d' = e' = 0$ 且 f' 與 λ_1 異號: 此時為空集合.

Example 7.7.4. 考慮坐標空間中曲面 $5x^2 + 5x^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz + 2x + 2y + z = 9$. 寫成矩陣形式為

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 9.$$

由於

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(請參考 Example 7.6.8 (2)). 考慮變數變換 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$, 我們得

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = 9.$$

因此此曲面用新的變數其方程式為 $9\bar{x}^2 + 9\bar{y}^2 + 3\bar{z} = 9$, 為前面列出的 (C)(1) 這個情形, 故知其為 elliptic paraboloid.

Question 7.15. 空間中曲面 $5x^2 + 5x^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz + 2x + 2y + z = 0$ 會是怎樣的圖形?

——————————— THE END 13 June, 2019