附錄：高維空間中平行多面體體積

行列式能夠幫我們計算 n 維空間中 n 個線性獨立向量所圍成的平行多面體的有向體積。但當向量個數少於 n 個，由於無法形成 n 階方陣，所以無法直接套用行列式處理這些向量所圍的平行多面體體積。因為在微積分中利用黎曼和計算高維空間中的體積以及 AI 對大量資料處理等都需要這方面的概念，在本附錄中，我們特別介紹如何利用行列式處理高維空間中一般的平行多面體體積。

首先要注意的是在 $\mathbb{R}^n$ 中，當 $k<n$ 時，我們沒有直接幾何概念定義 k 個向量的方向性。例如在 $\mathbb{R}^3$ 若要依循平面上逆時針轉為正向，則向量 $(1,1,0)$ 到 $(0,0,1)$ 是順時針或逆時針取決於我們是在它們所在的平面 $x-y=0$ 的哪一側來看。所以這裡我們不談方向性，而專注於體積。

首先我們看 $\mathbb{R}^n$ 中兩個線性獨立向量 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$，如何用幾何的看法（底乘以高）得到它們所形成的平行四邊形面積。首先利用 Gram-Schmidt Process（Theorem 4.3.9），利用 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 我們可以得到一個與 $\mathbf{v}_1$ 垂直的向量 $\mathbf{w}_2=\mathbf{v}_2-\dfrac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$。注意這裡 $\dfrac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$ 是 $\mathbf{v}_2$ 在 $\mathbf{v}_1$ 上的投影向量。也就是說，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 所形成的平行四邊形中，若以 $\mathbf{v}_1$ 為底，則 $\mathbf{w}_2$ 就是高所形成的向量。所以所求平行四邊形面積就是底乘以高 $\|\mathbf{v}_1\|\times\|\mathbf{w}_2\|$。這裡要用到 Gram-Schmidt Process，有點麻煩。事實上我們可利用 QR decomposition 的概念直接利用 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 求得面積。回顧一下：我們可以將 $\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2$ 改為單位向量 $\mathbf{u}_1=\dfrac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2=\dfrac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2$。經此改寫後 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 就可寫成 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 的線性組合 $\mathbf{v}_1=\|\mathbf{v}_1\|\mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_2=\dfrac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1+\mathbf{w}_2=\dfrac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{u}_1+\|\mathbf{w}_2\|\mathbf{u}_2$。因此若令 A 為依序以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 column vectors 的 $n\times2$ matrix，則 A 的 QR decomposition 為

$$A=\begin{bmatrix}| & |\\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\\ | & |\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}| & |\\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\\ | & |\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\mathbf{v}_1\| & \dfrac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|}\\ 0 & \|\mathbf{w}_2\|\end{bmatrix}.$$

注意 R 為 2×2 矩陣，所以可取行列式且其值 $\det(R)=\|\mathbf{v}_1\|\times\|\mathbf{w}_2\|$ 就是該平行四邊形的面積。要找到 QR decomposition 還是得經由 Gram-Schmidt Process，不過我們可以利用 determinant 的性質，直接求得面積。首先回顧一下，由於 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ 長度為 1（即 $\langle\mathbf{u}_1\rangle=\langle\mathbf{u}_2\rangle=1$）且垂直（即 $\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\rangle=1$），我們有 $Q^{\mathrm{t}}Q=\begin{bmatrix}-\ \mathbf{u}_1\ -\\ -\ \mathbf{u}_2\ -\end{bmatrix}\begin{bmatrix}| & |\\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2\\ | & |\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。因此考慮 n 階方陣 $A^{\mathrm{t}}A=(QR)^{\mathrm{t}}(QR)=R^{\mathrm{t}}(Q^{\mathrm{t}}Q)R=R^{\mathrm{t}}R$，兩邊取 determinant 得 $\det(A^{\mathrm{t}}A)=\det(R^{\mathrm{t}}R)=\det(R^{\mathrm{t}})\det(R)=\det(R)^2$。注意，這裡我們用到了 R^{t} 和 R 皆為方陣，所以可使用 $\det(R^{\mathrm{t}}R)=\det(R^{\mathrm{t}})\det(R)$ 以及 $\det(R^{\mathrm{t}})=\det(R)$ 這兩個性質。

從上可知當考慮 $\mathbb{R}^n$ 中兩個線性獨立向量 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 所形成的平行四邊形 Γ，我們可以令 A 為依序以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為 column vectors 的 $n\times2$ matrix，則 Γ 的面積為 $\sqrt{\det(A^{\mathrm{t}}A)}$。

Example 5.6.1. 考慮 $\mathbb{R}^3$ 上兩向量 $\mathbf{v}_1=(1,2,-1),\mathbf{v}_2=(3,1,1)$，外積得 $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=(3,-4,-5)$. 因此，由外積性質知 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 所形成的平行四邊形面積為 $\|\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2\|=\sqrt{9+16+25}=\sqrt{50}$。

利用前面介紹的方法，令 $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\-1&1\end{bmatrix}$，則 $A^{\mathrm{t}}A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&4\\4&11\end{bmatrix}$。因為 $\det\begin{bmatrix}6&4\\4&11\end{bmatrix}=50$，一樣求得平行四邊形面積為 $\sqrt{50}$。

我們驗證利用 Gram-Schmidt Process 處理的結果是否一致。由 $\mathbf{v}_2$ 在 $\mathbf{v}_1$ 的投影為 $\dfrac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1=\dfrac{2}{3}(1,2,-1)$ 得 $\mathbf{w}_2=(3,1,1)-\dfrac{2}{3}(1,2,-1)=\dfrac{1}{3}(7,-1,5)$。故由 $\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{6}$, $\|\mathbf{w}_2\|=\dfrac{1}{3}\sqrt{75}$ 得平行四邊形面積為 $\sqrt{6}\times\sqrt{\dfrac{25}{3}}=\sqrt{50}$。 ♯

接著我們考慮 $\mathbb{R}^n$ 中三個線性獨立向量 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 所形成的平行六面體體積。利用 Gram-Schmidt Process，考慮

$$\mathbf{w}_2=\mathbf{v}_2-\frac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1,\quad \mathbf{w}_3=\mathbf{v}_3-\frac{\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\frac{\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{w}_2\rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$$

則和前面相同 $\mathbf{w}_2$ 是 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 形成的平行四邊形中，以 $\mathbf{v}_1$ 為底其高所形成的向量。又因 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{w}_2$ 垂直，所以 $\dfrac{\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1-\dfrac{\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{w}_2\rangle}{\|\mathbf{w}_2\|^2}\mathbf{w}_2$ 是 $\mathbf{v}_3$ 在 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 形成的平行四邊形上的投影向量。因此 $\mathbf{w}_3$ 就是 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 形成的平行六面體中，以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 為底其高所形成的向量。所以 $\|\mathbf{v}_1\|\times\|\mathbf{w}_2\|\times\|\mathbf{w}_3\|$ 就是此平行六面體的體積。現將 $\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ 改為單位向量 $\mathbf{u}_1=\dfrac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2=\dfrac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2,\mathbf{u}_3=\dfrac{1}{\|\mathbf{w}_3\|}\mathbf{w}_3$。經此改寫後 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 就可寫成 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ 的線性組合 $\mathbf{v}_1=\|\mathbf{v}_1\|\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2=\dfrac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{u}_1+\|\mathbf{w}_2\|\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_3=\dfrac{\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{u}_1+\dfrac{\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{w}_2\rangle}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{u}_2+\|\mathbf{w}_3\|\mathbf{u}_3$。因此若令 A 為依序以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 為 column vectors 的 $n\times 3$ matrix，則 A 的 QR decomposition 為

$$A=\begin{bmatrix}|&|&|\\\mathbf{v}_1&\mathbf{v}_2&\mathbf{v}_3\\|&|&|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}|&|&|\\\mathbf{u}_1&\mathbf{u}_2&\mathbf{u}_3\\|&|&|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\|\mathbf{v}_1\|&\dfrac{\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|}&\dfrac{\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|}\\0&\|\mathbf{w}_2\|&\dfrac{\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{w}_2\rangle}{\|\mathbf{w}_2\|}\\0&0&\|\mathbf{w}_3\|\end{bmatrix}.$$

所以利用 $\det(R)=\|\mathbf{v}_1\|\times\|\mathbf{w}_2\|\times\|\mathbf{w}_3\|$ 就是此平行六面體的體積，如前我們依然可得此平行六面體的體積就是 $\sqrt{\det(A^{\mathrm{t}}A)}$。

從上討論在 $\mathbb{R}^n$ 中 k 個線性獨立向量 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$，若利用底乘以高的概念推廣至定義 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 所形成的平行多面體體積，則可以考慮由 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k$ 為 column vectors 所形成的 $n\times k$ 矩陣 A，並將 $k\times k$ 矩陣 $A^{\mathrm{t}}A$ 的行列式開根號 $\sqrt{\det(A^{\mathrm{t}}A)}$，就是其體積。特別的是：當 $k=n$ 時 A 為 n 階方陣，所以 $\det(A^{\mathrm{t}}A)=\det(A^{\mathrm{t}})\det(A)=\det(A)^2$，也就是說此時體積就是 $\det(A)$ 的絕對值。此於本章所提 $\det(A)$ 是 A 的 column vectors 所形成的平行多面體的有向體積一致。

最後我們順便談論對於一般的 $m\times n$ matrix A，有關 $\det(A^{\mathrm{t}}A)$ 的性質。首先回顧，當 $\operatorname{rank}(A)=n$（注意此時 $n\leq m$）時，A 會有 QR decomposition，所以由前知 $\det(A^{\mathrm{t}}A)=\det(R^{\mathrm{t}}R)=\det(R^{\mathrm{t}})\det(R)=\det(R)^2>0$。而其餘情況，即 $\operatorname{rank}(A)<n$，因為 $A^{\mathrm{t}}A$ 為 n 階方陣且 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{t}}A)=\operatorname{rank}(A)<n$（參見 Corollary 4.4.4），所以 $\det(A^{\mathrm{t}}A)=0$。我們有以下結論：

Proposition 5.6.2. 假設 $A \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$。則 $\det(A^{t}A) \geq 0$，且 $\det(A^{t}A) > 0$ 若且唯若 $\operatorname{rank}(A) = n$。

Exercise 5.12. 考慮 $\mathbb{R}^4$ 中的向量 $\mathbf{u} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$, $\mathbf{v} = (b_1,b_2,b_3,b_4)$, $\mathbf{w} = (c_1,c_2,c_3,c_4)$. 定義

$$\mathbf{u}\star\mathbf{v}\star\mathbf{w} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_1 \\ b_3 & b_4 & b_1 \\ c_3 & c_4 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_4 & a_1 & a_2 \\ b_4 & b_1 & b_2 \\ c_4 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right).$$

使用 $\mathbb{R}^4$ 中的內積（dot product）定義 $\mathbb{R}^4$ 中四個線性獨立向量所形成的多面體體積為：其中三向量所形成的平行六面體體積乘上高。

(1) 說明 $\mathbf{u}\star\mathbf{v}\star\mathbf{w}$ 分別與 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 垂直。

(2) 說明 $\|\mathbf{u}\star\mathbf{v}\star\mathbf{w}\|$ 就是 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 所形成的平行六面體體積。

(3) 考慮 $\mathbf{u} = (1,1,1,1)$, $\mathbf{v} = (3,1,-1,1)$, $\mathbf{w} = (1,1,3,3)$，試求 $\mathbf{u}\star\mathbf{v}\star\mathbf{w}$ 並計算其長度。

(4) 承 (3)，利用本節考慮 $A^{t}A$ 的方法求 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 所形成的平行六面體體積。

(5) 承 (3)，利用 Gram-Schmidt Process 求 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 所形成的平行六面體體積。