

當我們將 augmented matrix $[A | \mathbf{b}]$ 利用 elementary row operation 將之化成 $[A' | \mathbf{b}']$ 且 A' 為 echelon form 後, A' 有兩種情形: 一種情形為 A' 每一個 row 皆不全為 0; 另一種為 A' 有些 row 全為 0。我們分別依這兩種情形來討論聯立方程組的解。

(1) A' 每一個 row 皆不全為 0: 此時聯立方程組為 *consistent*, 即一定有解。我們又可細分成兩種情況:

(a) 第一種情況是每一個變數 (variable) x_i 皆為 pivot variable。亦即 pivot 的個數等於方程組未知數的個數 (即係數矩陣 A 的 column 個數)。例如

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

此時 echelon form 的 pivot variable 分別為 x_1, x_2, x_3 恰就是聯立方程組的未知數 x_1, x_2, x_3 。在這種情況之下此聯立方程組會有**唯一解**, 而且我們可利用從下往上“代回”的方式求得解。例如前面的 augmented matrix 所對應的聯立方程組為

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_3 &= 1 \end{aligned}$$

所以我們從最下面的 $-x_3 = 1$ 可得 $x_3 = -1$ (表示 x_3 的值非得是 -1 不可)。再將 $x_3 = -1$ 代入其上一式 $3x_2 + x_3 = 2$, 得 $3x_2 - 1 = 2$, 即 $x_2 = 1$ (故 x_2 一定是 1)。最後將 $x_3 = -1, x_2 = 1$ 代入 $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$, 得 $x_1 = 2$ 。故得唯一的一組解 $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$ 。

(b) 第二種情況是有些 variable x_i 不是 pivot variable, 也就是方程組未知數的個數多於 pivot 的個數。例如

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

此時 echelon form 的 pivot variable 分別為 x_1, x_2, x_4 少於立方程組的未知數 x_1, x_2, x_3, x_4 。在此情形之下此聯立方程組會有**無窮多解**。我們找出這種方程組所有的解。首先我們要找到 *free variables*。所謂 free variable 指的是方程組不是 pivot variable 的 variable。例如前面這個例子, x_3 就是 free variable。Free variable 意指它可以任意取值, 所以找到 free variables 後你可以給它們任意的參數, 然後再利用如上一情況中由下往上代回的方式找到聯立方程組所有的解。例如上一個 augmented matrix 所對應的聯立方程組為

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_4 &= 1 \end{aligned}$$

首先令 free variable x_3 為一參數 t (表示它可以是任意實數 $t \in \mathbb{R}$)。接著我們從最下面的 $-x_4 = 1$ 可得 $x_4 = -1$ (注意 x_4 不是 free, 它一定是 -1)。再將 $x_3 = t, x_4 = -1$ 代入其上一式 $3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2$, 得 $3x_2 + 3t - 1 = 2$, 即 $x_2 = 1 - t$ (注意 x_2 不是 free, 它的取值被 x_3, x_4 所限制)。最後將 $x_2 = 1 - t, x_3 = t, x_4 =$

-1 代入 $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4$, 得 $x_1 = 2 - t$ (注意 x_1 不是 free, 它的取值被 x_2, x_3, x_4 所限制)。故得此方程組解為 $x_1 = 2 - t, x_2 = 1 - t, x_3 = t, x_4 = -1$, 其中 t 為任意實數。因為 t 可以是任意實數, 由此我們也知此方程組有無窮多解。

(2) A' 有些 row 全為 0: 此時聯立方程組**可能無解**, 我們分成兩種情況:

(a) A' 有一個 row 全為 0 但 $\mathbf{b}'$ 在該 row 不為 0。例如

$$[A' | \mathbf{b}'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

A' 最後一個 row 皆為 0, 但 $\mathbf{b}'$ 在該 row 的位置為 1。在此情形之下聯立方程組為 *inconsistent*, 即**無解**。例如上一個 augmented matrix 其最後一個 row 所對應的方程式為

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

但不管 x_1, x_2, x_3 代任何的實數都無法滿足 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, 所以此方程組無解。

(b) A' 全為 0 的 row, $\mathbf{b}'$ 在該 row 亦為 0。例如

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

這兩個 augmented matrices 皆為這種情形。在此情形之下聯立方程組一定是 consistent **有解**。事實上在此情形我們可以忽略全為 0 的 row, 例如前兩個 augmented matrices 所對應的方程組和

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

所對應的方程組一樣。所以我們可依前面 (1) A' 每一個 row 皆不全為 0 的情況找出聯立方程組所有的解。

Question 1.2. 考慮一個由 n 個 variables 的 m 個方程式所組成的聯立方程組。試說明前面討論 (1)(a) 的情形只有在 $m = n$ 的時候才有可能發生; 而 (1)(b) 的情形只有在 $m < n$ 的情形才有可能發生。

Question 1.3. 說明一個由 n 個 variables 的 m 個方程式所組成的聯立方程組, 當係數矩陣的 rank 等於 m , 此聯立方程組一定有解 (即為 consistent)。而當係數矩陣的 rank 等於 n 時, 此聯立方程組若有解則解唯一。

我們總結, 當 A 是 echelon form 時, 找出 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 所有的解的方法。首先, 當 A 有一個 row 全為 0 但 $\mathbf{b}$ 在該 row 不為 0 時, 我們知該方程組無解。所以我們僅需討論其他的情況 (即有解的情況)。此時我們先挑出 free variable (即非 pivot variable)。由於 free variable 可以任意取值, 一般來說我們會用一些參數表示之 (注意不同的 free variable 要用不同的

參數代號)。接著，我們由下而上，從最大編號的 pivot variable 開始，利用 free variables 的那些參數將它的值寫下來，再依序寫出所有 pivot variables 的值。

我們看以下幾個解聯立方程組的例子。

Example 1.2.2. Solve the linear system

$$\begin{array}{rrcr} x_2 & -3x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & +3x_2 & -1x_3 & = 7 \\ 4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = 10. \end{array}$$

此聯立方程組的 augmented matrix 為

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array} \right].$$

由於第二、三 row 的 leading entry 在最左端；但第二 row 的 leading entry 的值較小，為了計算方便，我們將之置於第一個 row。即將一、二 row 交換得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array} \right].$$

接下來由於第三 row 的 leading entry 也在 x_1 的位置需要消去。所以將第一 row 乘上 -2 加到第三 row 得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array} \right].$$

此時係數矩陣仍不是 echelon form，需將第三 row 的 x_2 位置的 entry 消去。故將第二 row 加至第三 row 得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \right].$$

這是 echelon form。由於係數矩陣沒有全為 0 的 row，我們知此 linear system 為 consistent。而又 pivot 的個數等於 variable 的個數，故知此 linear system 的解唯一。事實上，最下面的 row（即第三 row）表示 $-3x_3 = -9$ ，得 $x_3 = 3$ 。代入第二 row 表示的 $x_2 - 3x_3 = -5$ ，得 $x_2 = 4$ 。最後代入第一 row 表示的 $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ ，得 $x_1 = -1$ 。故知此 linear system 的解為 $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 4, 3)$. ‡

Example 1.2.3. Solve the linear system

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -1x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & -1x_3 & -3x_4 & = & 7. \end{array}$$

此聯立方程組的 augmented matrix 為

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & 7 \end{array} \right].$$

第二、三 row 的 leading entry 需被消去。故將第一 row 分別乘上 $-2, -1$ 加到第二、三 row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & 5 \end{array} \right].$$

接下來由於第三 row 的 leading entry 需要消去，所以將第二 row 乘上 -1 加到第三 row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right].$$

這是 echelon form。由於第三 row 表示 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 8$ ，知此 linear system 為 inconsistent。 #

Example 1.2.4. Solve the linear system

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 1x_3 - 1x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 3 \\ -x_1 + 1x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 5. \end{aligned}$$

此聯立方程組的 augmented matrix 為

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 5 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 5 \end{array} \right].$$

第二、三、四 row 的 leading entry 需被消去。故將第一 row 分別乘上 $-2, -3, 1$ 加到第二、三、四 row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 9 \end{array} \right].$$

接下來第三、四 row 的 leading entry 需要消去，所以將第二 row 分別乘上 $-1, 1$ 加到第三、四 row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

這是 echelon form。由於係數矩陣沒有 pivot 的第三、四 row 全為 0，知此 linear system 為 consistent。

事實上此 linear system 的 pivot variables 為 x_1, x_2 ，而 free variables 為 x_3, x_4 。我們可以令 $x_4 = r$ 、 $x_3 = s$ 代入第二 row 表示的 $x_2 + 2x_3 - x_4 = -9$ ，得 $x_2 = -9 + r - 2s$ 。再代入第一 row 表示的 $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4$ ，得 $x_1 = -14 + 3r - 5s$ 。故知此 linear system 的解為

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-14 + 3r - 5s, -9 + r - 2s, s, r), r, s \in \mathbb{R}.$$

通常我們習慣寫成 column vector 且將 r, s 提出。故將解寫成

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, r, s \in \mathbb{R}.$$

‡

了解到解聯立方程組的方法及步驟後，有幾件事必須要說明：(1) 為何經由 elementary row operations 我們可以將一個矩陣化為 echelon form？(2) 為何利用這個 echelon form，便可得到與原方程組相同的解集合？(3) 為什麼用前面介紹 (pivot variables, free variables) 的方法就可以把係數矩陣是 echelon form 的聯立方程組所有的解找出來？在下一節，我們將詳細介紹有關 echelon form 的特性，然後一一回答這些問題。不過再次提醒大家務必先熟悉這節介紹解聯立方程組的方法及步驟。

1.3. Echelon Form 的性質

這一節中我們將說明前面提到有關 echelon form 的三個問題。首先我們利用數學歸納法來說明為何一定可以將一個矩陣利用 elementary row operations 化為 echelon form。接著說明 elementary row operations (即加減消去法) 會保持聯立方程組的解集合。最後說明 pivot variables 和 free variables 對解集合的影響，並依此得知上一節所說的方法確實能幫我們找到所有的解。了解這些之後，我們便能說明為何一個矩陣利用 elementary row operations 變成 echelon form 其 pivot 所在位置 (即 pivot variables) 是固定的，也進一步說明為何化成 “reduced echelon form” 會是唯一的。

對於一定可以化成 echelon form 這部分，基本上我們是對矩陣的 row 的個數作數學歸納法。我們先看只有一個 row 的矩陣。此時由於沒有任何的 row 在其下方所以依定義自然是 echelon form。接著看有兩個 row 的矩陣。首先注意依定義一個 echelon form 的第一個 row 其 leading entry (若有的話) 的位置必在所有其他 row 的 leading entry 所在位置的左方。所以我們在此有兩個 row 的矩陣挑出 leading entry 在最左方的一個 row (若兩個 row 的 leading entry 所在位置相同就任取一個 row) 利用 type 1 elementary row operation 將之置於第一個 row。接下來注意依定義下一個 row 的 leading entry 所在位置需在第一個 row 的 leading entry 位置的右方。現若第二個 row 的 leading entry 所在位置和第一個 row 不同，依定義此時已為 echelon form。而若第二個 row 的 leading entry b 所在位置和第一個 row 的 leading entry a 相同，我們可將第一個 row 乘以 $-b/a$ ，再添加到第二個 row 上。也就是說我們可以用 type 3 elementary row operation 將第二個 row 原本的 leading entry 變為 0，故其 leading entry 所在位置往右移了。依定義此時為 echelon form。我們說明了，所有有兩個 row 的矩陣都能化為 echelon form。

現考慮 3 個 row 的矩陣。同樣的我們可以用 type 1 elementary row operation 讓 leading entry 在最左方的一個 row 換到第一個 row。然後用 type 3 elementary row operation 讓其他兩個 row 在同樣位置成為 0。接著第一個 row 不動，套用前面探討兩個 row 的矩陣情形將剩餘的兩個 row 化為 echelon form，這樣就讓整個矩陣成為 echelon form 了。如此一直

下去我們可證有 4, 5, 6, ... 個 row 的矩陣會成立。也就是說我們利用有 k 個 row 的矩陣一定能利用 elementary row operations 化為 echelon form 這個事實來說明有 $k+1$ 個 row 的矩陣一定也能利用 elementary row operations 化為 echelon form。這種方法就是所謂“數學歸納法”，由於這裡目的是讓大家了解這個過程及原因，我們沒有用嚴謹的數學歸納法來論證。從這裡我們也清楚了解：只要用 type 1 和 type 3 的 elementary row operations 就能將矩陣化為 echelon form。

接著我們說明為何將 augmented matrix $[A \mid \mathbf{b}]$ 利用 elementary row operations 化成 echelon form $[A' \mid \mathbf{b}']$ ，則其對應的聯立方程組 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 會和原方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有相同的解集合。雖然變成 echelon form 需要一連串的 elementary row operations，不過我們只要說明單一的 elementary row operation 不會改變解集合，就能得到這一連串的 elementary row operation 都不會改變解集合。首先觀察若將一聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的 augmented matrix $[A \mid \mathbf{b}]$ 利用三種 elementary row operation 的任一種變換成 $[A' \mid \mathbf{b}']$ 表示將原方程組利用加減消去法的三個基本方法將之變成方程組 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 。然而方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 若利用加減消去法的三種方法（即將兩式子對調順序或將某一式乘上某個非 0 實數或將一個式子乘上某個實數加到另一個式子）變換成方程組 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ ，原來滿足 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解仍會滿足 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 。也就是說 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解就會是 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 的解。例如考慮聯立方程組
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$
。如果 $x_1 = c_1, x_2 = c_2$ 是此方程組的一組解，表示 $a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = b_1$ 以及 $a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = b_2$ 。也因此 $x_1 = c_1, x_2 = c_2$ 也會是聯立方程組
$$\begin{cases} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \end{cases}$$
 的一組解。

我們理解了 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解就會是 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 的解，不過這不表示它們會有相同的解集合。我們還要說明 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 的解也會是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解才行。然而我們前面提及 elementary row operations 是可以還原的。換句話說 $[A' \mid \mathbf{b}']$ 也可經由 elementary row operations 變換成 $[A \mid \mathbf{b}]$ 。所以套用剛才的理由，我們也知 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 的解就會是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解。因此得證 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 會有相同的解集合。

當連立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 它們的解集合相同，這表示兩組方程組是有很特別的關係，我們有以下的定義：

Definition 1.3.1. 假設 linear systems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 的解集合相同，則稱 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 為 *equivalent linear systems*

從上面的探討我們知道 augmented matrix $[A \mid \mathbf{b}]$ 若利用 elementary row operations 化成 $[A' \mid \mathbf{b}']$ ，則 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 為 equivalent linear systems。

我們已知要探討聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解，僅要考慮 A 為 echelon form 的情形。接下來我們就是要討論當 A 為 echelon form 時，聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解的特性。事實上我們很容易理解利用 1.2 節中所提求解的方法所得的結果皆為方程組的一組解。這裡要探討的是為何利用 1.2 節中所提求解的方法，就可得所有的解。

如果我們得到 1.2 節 (2)(a) 的情形（即 A 有一個 row 全為 0 但 $\mathbf{b}$ 在該 row 不為 0）。在該節已說明此時方程組無解。所以我們只要探討有解的情形。回顧一下在 1.2 節所提求解的方法：首先我們要找到 *free variables*，即方程組除了 pivot variable 以外的 variable。

接著給這些 free variable 任意的參數值，然後再利用由下往上代回的方式找到聯立方程組所有的解。若無 free variable，就直接由下往上一步一步求值即可。

由於可以忽略 augmented matrix 全為 0 的 row，我們可假設係數矩陣 A 沒有一個 row 全為 0。因為 A 為 echelon form，這也表示 A 每一個 row 皆有 leading entry 且為 pivot。現在我們回答當 A 是 echelon form 時，1.2 節中所述解聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的方法所求得的解就是所有的解。也就是說任取 $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ 為 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解，我們要說明這組解確實可由 1.2 節所提的方法得到。為了方便起見我們令 1.2 節所提的方法所得的解所成的集合為 S 。我們只要說明 $(x_1, \dots, x_n) = (c_1, \dots, c_n)$ 確實為 S 中的元素即可。現若 x_n 為 pivot variable，則 x_n 的值是被唯一確定的。所以 S 的所有元素其 x_n 的取值一定是 c_n 。若 x_n 為 free variable，則因 S 的解法中 x_n 可為任意值，故 S 中一定有一組解其 x_n 的取值為 c_n 。也就是說不管 x_n 是否為 pivot variable， S 中必有一組解其 x_n 的取值為 c_n 。現若 x_{n-1} 為 pivot variable，則由此 pivot 所在的 row 所對應的方程式可知 x_{n-1} 的取值會被 x_n 的取值所決定。今已知 S 中必有一組解其 x_n 的取值為 c_n ，故此組解必滿足 $x_{n-1} = c_{n-1}, x_n = c_n$ ；而若 x_{n-1} 為 free variable，則因 S 的解中 x_{n-1} 可為任意值且其取值不影響到 x_n 的取值，故知 S 中必有一組解其 x_{n-1}, x_n 的取值為 $x_{n-1} = c_{n-1}, x_n = c_n$ 。如此一直下去我們知道 S 中必有一組解其 $x_1, \dots, x_n$ 的取值為 $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ 。

利用上面的概念我們可以推導出當 A 為 echelon form 時 pivot variables 和 free variables 對聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解的影響。假設 A 為一有 n 個 column 的 echelon form，亦即 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有 $x_1, \dots, x_n$ 等 n 個變數。首先看 pivot variable 對聯立方程組的解之影響。如果最後一個變數 x_n 是 pivot variable，即 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最後一個式子為 $ax_n = b$ ，其中 $a \neq 0$ 這樣的形式。此時可得 $x_n = b/a$ ，亦即所有可能的解中其 x_n 的取值是固定的數。同理，若 x_k 為 A 的一個 pivot variable，其中 $1 \leq k \leq n-1$ ，此時 x_k 為 pivot 所對應的式子為 $a_k x_k + a_{k+1} x_{k+1} + \dots + a_n x_n = b$ ，其中 $a_k \neq 0$ 這樣的形式。所以如果有一組解其 $x_{k+1} = c_{k+1}, \dots, x_n = c_n$ ，則 $x_k = \frac{1}{a_k} (b - (a_{k+1} c_{k+1} + \dots + a_n c_n))$ ，亦即所有可能的解中其 x_k 的取值是完全被後面的變數 $x_{k+1}, \dots, x_n$ 的取值所限定。所以我們可以歸納出以下的結論：

Lemma 1.3.2. $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ 和 $x_1 = d_1, \dots, x_n = d_n$ 皆為方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解。

- (1) 假設 x_n 為 A 的一個 pivot variable。則 $c_n = d_n$ 。
- (2) 假設 x_k 為 A 的一個 pivot variable，其中 $1 \leq k \leq n-1$ 。若 $c_{k+1} = d_{k+1}, \dots, c_n = d_n$ ，則 $c_k = d_k$ 。

相對於 pivot variable 我們知道對於 free variable 我們可以隨意取任何的實數而得到一組解，所以我們有以下 free variable 對解的影響。

Lemma 1.3.3. 假設 A 為一有 n 個 column 的 echelon form 且沒有一個 row 全為 0。

- (1) 假設 x_n 為 A 的一個 free variable。則對任意的實數 r ，方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆可找到一組解其 $x_n = r$ 。

- (2) 假設 x_k 為 A 的一個 *free variable*, 其中 $1 \leq k \leq n-1$. 若 $x_1 = c_1, \dots, x_n = c_n$ 為方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解, 則對任意實數 r 方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆可找到一組解其 $x_k = r$ 且 $x_{k+1} = c_{k+1}, \dots, x_n = c_n$.

接下來, 我們用兩個前面討論過的例子說明一下 Lemma 1.3.2 和 Lemma 1.3.3.

Example 1.3.4. 在 Page 7, 我們知道聯立方程組

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & 3x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 2 \\ & & & -x_4 & = & 1 \end{array}$$

的解為 $x_1 = 2-t, x_2 = 1-t, x_3 = t, x_4 = -1$, 其中 t 為任意實數。我們可以看出, 雖然這組方程組有無窮多解, 不過所有的解中 x_4 的值一定是 -1 。這就是 Lemma 1.3.2 (1) 中說的因為 x_4 是最後一個 variable 且為 pivot, 所以任兩組解的 x_4 的值都相同。又讓我們隨便選一組解, 例如 $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = -1$ (即 t 代 0 的情況)。由於 x_3 是 free variable, Lemma 1.3.3 (2) 告訴我們若選定 $x_4 = -1$, 我們都可將 x_3 隨便代一個值來得到一組解。要注意的是, x_2 雖為 pivot variable, 不過 Lemma 1.3.2 (2) 並不是告訴我們任選兩組解其 x_2 的值都會一樣。它是說若這兩組解的 x_3, x_4 的值是一致的則它們 x_2 的值也會一樣。例如 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$ 也是一組解, 它的 x_2 的值 0 就和前面那組解的 x_2 的值 1 就不同。不過若兩組解它們有一致的 x_3 和 x_4 , 那麼它們 x_2 的值也一致。這可從前面所給的解集合看出。

在 Page 10, 我們知道聯立方程組

$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & -9 \end{array}$$

的解為 $x_1 = -14 + 3r - 5s, x_2 = -9 + r - 2s, x_3 = s, x_4 = r$, 其中 s, r 為任意實數。由於最後一個 variables x_4 是 free variable, Lemma 1.3.3 (1) 告訴我們任意給一個實數 r 都可以找到一組解其 x_4 的值為 r 。然而 x_3 也是 free variable, 所以 Lemma 1.3.3 (2) 告訴我們再任意選一個實數 s , 我們都可以找到一組解其 x_4 和 x_3 的值分別為 r 和 s 。這都可以由解集合看出來。又 x_2 是 pivot variable, 而 Lemma 1.3.2 (2) 告訴我們若有兩組解其 x_3 的值是一樣的且 x_4 的值也一樣, 則這兩組解的 x_2 的值也會一樣。因而再由 x_1 是 pivot variable 可知它們 x_1 的值也相同。這也和解集合若 $x_4 = r, x_3 = s$, 則可確定 x_2 和 x_1 的值分別為 $-9 + r - 2s$ 和 $-14 + 3r - 5s$ 相吻合。 $\#$

當我們給一個矩陣時, 有許多種方法將之化為 echelon form, 而且化成的 echelon form 很可能不一樣。不過利用 Lemma 1.3.2 和 Lemma 1.3.3 我們可以得到這些 echelon form 雖然可能不一樣, 但它們 pivot 的所在位置都會一致。由於我們只關心係數矩陣 A 化為 echelon form 後的情形, 所以我們可以考慮 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 這一種特殊形式的聯立方程組。要注意這樣的聯立方程組都會有解, 因為 $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ 就是一組解。我們特別稱這樣的聯立方程組為 *homogeneous system*。

Proposition 1.3.5. 給定一矩陣 A 。若 A_1, A_2 均為 A 利用 *elementary row operations* 化成的 echelon forms, 則 A_1 和 A_2 的 pivot 個數相同。事實上它們的 pivot variables 也一致。

Proof. 我們考慮 $Ax = \mathbf{0}$ 這一組聯立方程組，其中 A 有 n 個 column (即此方程組有 n 個變數)。因為 A 可利用 elementary row operations 化為 A_1 及 A_2 ，這表示 augmented matrix $[A | \mathbf{0}]$ 可以利用 elementary row operations 化為 $[A_1 | \mathbf{0}]$ 及 $[A_2 | \mathbf{0}]$ 。換句話說聯立方程組 $A_1x = \mathbf{0}$ 和 $A_2x = \mathbf{0}$ 皆與聯立方程組 $Ax = \mathbf{0}$ 有同樣的解。再次強調：這些聯立方程組都會有 $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ 這樣的一組解。

我們要用反證法處理。假設 A_1 和 A_2 有 pivot variable 不一致。不失一般性，我們就假設對 A_1 來說 x_i 是 pivot variable 但對 A_2 來說 x_i 不是 pivot variable (即 free variable)。假設 $i = n$ ，這表示方程組 $A_1x = \mathbf{0}$ 的解中 x_n 的取值是唯一的 (Lemma 1.3.2)。事實上 x_n 一定為 0；但 $A_2x = \mathbf{0}$ 的解中 x_n 的取值卻可以是任意的實數 (Lemma 1.3.3)。這和此二方程組有相同的解相矛盾。現若 $1 \leq i \leq n-1$ ，利用 $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$ 已是這兩聯立方程組的解，因為 x_i 是 A_1 的 pivot variable，我們知道方程組 $A_1x = \mathbf{0}$ 的解中一定找不到一組解其 $x_{i+1}, \dots, x_n$ 的取值皆為 0 但 x_i 的取值不是 0 (Lemma 1.3.2)；另一方面因為 x_i 是 A_2 的 free variable，Lemma 1.3.3 告訴我們 $A_2x = \mathbf{0}$ 的解中一定可找到一組解其 $x_{i+1}, \dots, x_n$ 的取值皆為 0 但 x_i 的取值不是 0 (事實上 x_i 可以是任意實數)。這又和 $A_1x = \mathbf{0}, A_2x = \mathbf{0}$ 此二方程組有相同的解相矛盾，故由反證法知 A_1 和 A_2 的 pivot variables 是一致的。□

在解聯立方程組的過程中還可以進一步將 echelon form 化為所謂的 *reduced echelon form*。Reduced echelon form 事實上仍為 echelon form，不過再加上兩個限制：第一個限制是每一個 pivot entry 需為 1；另一個限制為 pivot 的位置上方全為 0。要注意，依定義 echelon form 的 pivot 位置下方已全為 0 所以 reduced echelon form 每一個 pivot 所在的 column，除了自己需為 1 外其他部分皆為 0。例如

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

都不是 reduced echelon form 但是

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

就是 reduced echelon form。每一個 echelon form 皆可利用 elementary row operations 換為 reduced echelon form。這是因為，若有一個 row 的 pivot entry 為 a (注意依定義 $a \neq 0$)，我們只要將該 row 乘上 $1/a$ ，則該 row 的 pivot entry 便是 1 了 (這就是需要 type 2 的 elementary row operation 的地方)。例如上面 A 這一個 echelon form 若將第二個 row 乘上 $1/3$ ，就可得 A' 這一個 reduced echelon form。當我們將每個 pivot 都變為 1 後，就可利用 type 3 elementary row operation 將 pivot 所在的 column 的其他部分化為 0。例如上面 B 這一個 echelon form 若將第三個 row 分別乘上 -3 、 -1 加到第一個 row、第二個 row，就可得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。再將第二個 row 乘上 -1 加到第一個 row，就可得 B' 這一個 reduced echelon form。注意一般我們都是從上而下將矩陣換成 echelon form，不過得到 echelon form 後是從下而上將 echelon form 換成 reduced echelon form 較為方便。

化為 reduced echelon form 後，我們就可以利用前面由 echelon form 求解的方法求出聯立方程組的解。由於 reduced echelon form 每一個 row 除了該 row 的 pivot 外，只剩 free variables (其他的 pivot variable 所在的 entry 皆為 0)，所以可以很快地看出解的形式。例如方程組 $B'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 為

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = 0 \\ x_2 & +3x_4 & = 0 \\ x_3 & -x_4 & = 0 \end{array}$$

因僅 x_4 為 free variable，令 $x_4 = t$ 代入第三 row 得 $x_3 = t$ 。代入第二 row 得 $x_2 = -3t$ 。最後由第一 row 得 $x_1 = 0$ 。故知解為 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -3t, t, t) = t(0, -3, 1, 1), t \in \mathbb{R}$ 。

我們知道每個矩陣皆可經由 elementary row operations 化為 echelon form。而我們又知每個 echelon form 也可利用 elementary row operations 化為 reduced echelon form。因此每個矩陣皆可利用 elementary row operations 化為 reduced echelon form。另外我們也知道將聯立方程組的 augmented matrix 做 elementary row operations 後所對應的聯立方程組會是 equivalent，所以化為 reduced echelon form 所得的解集合也會和原方程組的解集合相同。

化成 reduced echelon form 雖然在最後可以很快地看出解的形式，但一般來說化為 reduced echelon form 比僅化為 echelon form 所需的步驟多了許多，所以利用 echelon form 來求解還是會比較快。利用 echelon form 求解的方法一般稱為 *Gauss method* 或 *Gaussian elimination*；而用 reduced echelon form 求解一般稱為 *Gauss-Jordan method*。

Example 1.3.6. Example 1.2.2 的 linear system，化成 echelon form 後為

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \right].$$

將第三 row 乘以 $-1/3$ 得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

再將第三 row 分別乘以 3, 1 加到第二，第一 row 得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

接著將第二 row 乘以 -3 加到第一 row 得

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

最後將第一 row 乘以 $1/2$ 得 reduced echelon form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right],$$

且馬上看出解為 $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 4, 3)$ 。

Example 1.2.4 的 linear system，化成 echelon form 後為

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

將第二 row 乘以 2 加到第一 row 得 reduced echelon form

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

因 x_4, x_3 為 free variables，令 $x_4 = r, x_3 = s$ 代入第二 row 得 $x_2 = -9 + r - 2s$ 。再代入第一 row 得 $x_1 = -14 + 3r - 5s$ 。 #

我們可以套用 Proposition 1.3.5 的證明方法，證明一個矩陣利用 elementary row operations 化為 reduced echelon form 其結果是唯一的。

Theorem 1.3.7. 給定一矩陣 A 。若 A_1, A_2 均為 A 利用 elementary row operations 化成的 reduced echelon forms，則 $A_1 = A_2$ 。

Proof. 我們考慮 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 這一組聯立方程組，依假設聯立方程組 $A_1\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $A_2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 皆與聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有同樣的解。

利用反證法。假設 $A_1 \neq A_2$ 且假設從下往上， A_1, A_2 第一個發生相異的 row 其 pivot variable 為 x_k （注意由 Proposition 1.3.5，我們知道 A_1, A_2 的 pivot variables 是一致的）。現假設 A_1, A_2 在此 row 所對應的方程式分別為

$$x_k + a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n = 0 \quad \text{與} \quad x_k + b_{k+1}x_{k+1} + \cdots + b_n x_n = 0 \quad (1.2)$$

其中存在 l 滿足 $k+1 \leq l \leq n$ 且 $a_l \neq b_l$ 。若 x_l 為 pivot variable，由於 A_1, A_2 皆為 reduced echelon form，在這個 row 中其他的 pivot variable 對應的係數應為 0，而導致 $a_l = b_l = 0$ 之矛盾。故知 x_l 應為 free variable。我們已知給定一組 free variables 的值，可以用由下往上代回的方式得到聯立方程組的解。現考慮除了 x_l 這一個 free variable 代 1，其他 free variables 皆代 0 所得的解。設依此所得 $A_1\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 與 $A_2\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解分別為 $(x_1, \dots, x_n) = (c_1, \dots, c_n)$ 與 $(x_1, \dots, x_n) = (d_1, \dots, d_n)$ 。注意：若 x_j 為 pivot variable，其中 $j > k$ ，則 $a_j = b_j = 0$ 。所以此時 x_j 的取值不會影響到 x_k 的取值。也就是說式子 (1.2) 帶入這兩組解後分別為

$$c_k + a_l = 0 \quad \text{與} \quad d_k + b_l = 0.$$

又由於依假設 A_1, A_2 在 x_k 為 pivot 這一個 row 以下的每一個 row 都一致，我們知對所有 $k+1 \leq i \leq n$ 皆有 $c_i = d_i$ 。然而這兩組解皆為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解且 x_k 為 pivot variable，故由 Lemma 1.3.2 知 $c_k = d_k$ ，可得 $a_l = -c_k = -d_k = b_l$ 。此與 $a_l \neq b_l$ 的假設相矛盾，故知 $A_1 = A_2$ 。 □

利用化成 reduced echelon form 來解 linear system 雖然步驟較多，不過仍然有它的好處。例如因為化成 echelon form 並不唯一，所以有可能同一組 linear system 因化成 echelon form 求解寫下來的解集合的元素的表現“形式”會不同（只是形式不同，解集合是一樣的）。若化成 reduced echelon form 就不會這樣了。因為它是唯一的，所以大家寫下來的解集合的元素表示的“形式”是一致的。另外若要判斷兩個矩陣是否可以用一些 elementary row operations 將其中一個換成另一個，將這兩個矩陣化成 reduced echelon form 就可以了。如果它們化成 reduced echelon form 是一致的，那當然表示它們是可以用一些 elementary row operations 將其中一個換成另一個；而若不一致，則由唯一性可知它們不可能用一些 elementary row operations 將其中一個換成另一個。

Question 1.4. 假設矩陣 A, B 分別可利用 elementary row operations 化成 reduced echelon form A', B' 。試說明 A 可利用 elementary row operations 化成 B 若且唯若 $A' = B'$ 。

在本章中我們學習解聯立方程組的技巧。利用 elementary row operations 將 augmented matrix 中的係數矩陣化為 echelon form 後，我們很快的可以知道此聯立方程組是否有解。而有解時也可利用此 echelon form 完整的得到此聯立方程組所有的解。由 echelon form 的解法我們了解到 pivot variables 和 free variables 對聯立方程組是否有解以及解是否唯一有著重要的關連。本章中有關聯立方程組的理論對後面線性代數理論的建立影響深遠，千萬不要以為會解具體的聯立方程組就可以了，而忽視這些理論。

Exercise 1.6. 試解以下的 system of linear equations。

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 4x_5 = -5 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

Exercise 1.7. 已知存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使得聯立方程組

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= -6\beta \\ 2x_1 + x_2 + (\alpha + 1)x_3 &= 4 \\ \alpha x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2\beta \end{aligned}$$

有無窮多組解。試找出這些所有可能的數對 (α, β) 。

Exercise 1.8. 假設 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是一個有三個未知數 x_1, x_2, x_3 的聯立方程組，其中 A 不為零矩陣。已知 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$ 以及 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 3)$ 皆為此聯立方程組的解。

- (1) 試舉例說明 x_3 未必是 pivot variable.
- (2) 說明不管 x_3 是否為 pivot variable, x_2 一定是 free variable.
- (3) 說明若 x_3 是 free variable, 則 x_1 是 pivot variable.
- (4) 試依 x_1, x_3 是否為 pivot variables 的各種情況分別寫下與 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 為 equivalent 的 linear system. (Hint: 共有 3 種可能，利用 reduced echelon form 處理)

Exercise 1.9. 試將以下矩陣化為 reduced echelon form.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 & -7 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercise 1.10. 試說明以下矩陣那些可利用 elementary row operations 互換。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$