由 Proposition 2.1.9 和 Proposition 2.1.10 的證明我們可以看出，有些矩陣乘法性質的推導可以簡化成右邊的矩陣是一個 column 的情形處理。其實利用 row 來看矩陣的乘法也很很有用，不過這個留待下一節介紹矩陣的 transpose（轉置）後會更清楚。

利用矩陣乘法定義，也可推得乘法具有結合律的性質（即 $(AB)C = A(BC)$）。這裡要注意 A, B, C 的階數必須要有限制 $(AB)C$ 和 $A(BC)$ 才會有意義。

Proposition 2.1.11. 假設 $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times l}, C \in M_{l\times k}$，則 $(AB)C = A(BC)$。

Proof. 依定義 $AB \in M_{m\times l}$，故 $(AB)C \in M_{m\times k}$。而 $BC \in M_{n\times k}$，故 $A(BC) \in M_{m\times k}$ 與 $(AB)C$ 同階。

對於 $1 \leq j \leq k$，我們要證明 $(AB)C$ 和 $A(BC)$ 的 j-th column 相等。令 $\mathbf{c}_j$ 為 C 的 j-th column 依定義 $(AB)C$ 的 j-th column 為 $(AB)\mathbf{c}_j$。至於 $A(BC)$ 的 j-th column，依定義為 A 右邊乘上 (BC) 的 j-th column（即 $B\mathbf{c}_j$）。所以我們僅要說明 $(AB)\mathbf{c}_j = A(B\mathbf{c}_j)$，就可證得結合律。

由於 $\mathbf{c}_j$ 只有一個 column，為了方便考量，我們將 $\mathbf{c}_j$ 用單一足碼表達，即令 $\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{bmatrix}$。現對任意 $i = 1, \ldots, l$，令 AB 的 $i-th$ column 為 $\mathbf{p}_i$，則

$$(AB)\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_l \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{bmatrix} = c_1\mathbf{p}_1 + \cdots + c_l\mathbf{p}_l.$$

然而若 $\mathbf{b}_i$ 為 B 的 i-th column，依定義 $\mathbf{p}_i$ 為 AB 的 i-th column 故得 $\mathbf{p}_i = A\mathbf{b}_i$。因此我們得

$$(AB)\mathbf{c}_j = c_1(A\mathbf{b}_1) + \cdots + c_l(A\mathbf{b}_l).$$

另一方面

$$A(B\mathbf{c}_j) = A(\begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_l \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{bmatrix}) = A(c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_l\mathbf{b}_l).$$

注意這裡我們將 $\mathbf{b}_i$ 視為 $\mathbb{R}^n$ 中的 column vector，故套用 Proposition 2.1.6（或 Question 2.1）可得 $A(c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_l\mathbf{b}_l) = c_1(A\mathbf{b}_1) + \cdots + c_l(A\mathbf{b}_l)$。所以得證 $(AB)\mathbf{c}_j = A(B\mathbf{c}_j)$。 □

有了矩陣乘法的結合律（Proposition 2.1.11），以後我們談多個矩陣相乘時，為了方便起見，我們會捨去括號例如直接用 ABC 表示。特別的，當 A 為方陣時，既然 $(AA)A = A(AA)$，我們就用 A^3 來表示。同理，當 n 個 A 相乘時，我們就用 A^n 來表示。

最後我們要強調的是矩陣乘法雖具有許多和實數乘法類似的性質，但它卻沒有交換律。事實上有可能 A 乘以 B 有定義，但 B 卻不能乘以 A。例如 $A \in M_{2\times 3}$、$B \in M_{3\times 4}$ 的情形。也有可能即使 A 乘以 B 和 B 乘以 A 都有定義，但由於乘了以後階數不同，仍會使得 $AB \neq BA$。例如 $A \in M_{2\times 3}, B \in M_{3\times 2}$ 的情形。僅有在 A, B 為同階方陣時，才有可能使得 AB 和 BA 的階數相同；但此時仍有可能 $AB \neq BA$。例如：

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & -d \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & -d \end{bmatrix},$$

這種情形只有在 $b=c=0$ 時，才會使得 $AB=BA$。所以在處理矩陣乘法時要特別小心。例如當 A,B 為同階方陣時由 Proposition 2.1.9 和 Proposition 2.1.10 可推得 $(A-B)(A+B)=A^2-AB+BA-B^2$，但由於可能 $AB\neq BA$，我們不見得會有 $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$。

當然了，仍然有許多方陣會和所有的同階方陣相乘是可交換的。一個常見的就是 *zero matrix*（零矩陣）O（即 $O=[a_{i,j}]$ 滿足每一個 entry $a_{i,j}=0$）。很容易驗證若 O 是一個 $n\times n$ square matrix，則對任意 $A\in M_{n\times n}$ 皆有 $OA=AO=O$。另一個常見的便是所謂的 *identity matrix*。通常 $n\times n$ 階的 identity matrix，我們會用 I_n 來表示。I_n 的 i-th column 為 $\mathbf{e}_i$，即 $\mathbb{R}^n$ 的 column vector，其中 i-th entry 為 1，其他 entry 為 0。事實上 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 就是我們熟悉的 $\mathbb{R}^n$ 的 standard basis（標準基底）。例如

$$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

利用矩陣乘法的定義，很容易知道對任意 $A\in M_{m\times n},B\in M_{n\times l}$ 我們皆有 $AI_n=A,I_nB=B$。特別的，當 A 為 $n\times n$ matrix，我們有 $AI_n=I_nA=A$。

Question 2.4. 假設 $A\in M_{n\times n}$，是否 $(A-2I_n)^2=A^2-4A+4I_n$ 為對？

Question 2.5. 試證明 I_n 是唯一的 $n\times n$ 矩陣滿足對任意 $A\in M_{m\times n}$ 皆滿足 $AI_n=A$。

一個 $n\times n$ 的 square matrix 其 (i,i)-th entry 稱為 diagonal entry。若除了 diagonal entries 以外，其他的 entry 皆為 0，我們便稱之為 *diagonal matrix*。Identity matrix 就是一個 diagonal matrix。因為它的 diagonal entry 皆為 1，其他的 entry 皆為 0。另外，對於任意 $r\in\mathbb{R}$, rI_n 亦為 diagonal matrix。因為它 diagonal entry 皆為 r，其他 entry 皆為 0。對於任意 $A\in M_{m\times n},B\in M_{n\times l}$ 我們很容易驗證 $rA=A(rI_n),rB=(rI_n)B$。

Question 2.6. 試驗證對任意 $n\times n$ 矩陣 A，皆有 $(rI_n)A=A(rI_n)$

要注意，並不是所有 $n\times n$ 的 diagonal matrix 都會和 $n\times n$ 的 square matrix 相乘可交換。前面曾給過例子 $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 就不能和所有的 2×2 相乘可交換。

2.2. Transpose Operation

從 row 的角度來看矩陣相乘也有許多實際應用。這一節中我們將介紹矩陣取 transpose（即轉置矩陣）的概念及其相關性質。讓大家理解取 transpose 對於矩陣的影響，並利用它來探討如何從 row 的角度來看矩陣相乘。

對於一個 $m\times n$ matrix，簡單來說其轉置矩陣就是將此矩陣的 row 與 column 的腳色互換。也就是說將 row vectors 依序換成 column vectors。我們有以下的定義：

Definition 2.2.1. 給定 $A\in M_{m\times n}$。定義 $A^{\mathrm{t}}\in M_{n\times m}$，其中對於 $1\leq i\leq m$，A^{t} 的 i-th column 就是將 A 的 i-th row 寫成 column vector。我們稱 A^{t} 為 A 的 *transpose*。

Example 2.2.2. 令
$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\end{bmatrix},$$
依定義 A^{t} 應為 3×2 matrix。其中 A^{t} 的第一個 column 為 A 的第一個 row $\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$ 寫成 column vector，即 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$。同理 A^{t} 的第二個 column 為 A 的第二個 row $\begin{bmatrix}-1&-2&-3\end{bmatrix}$ 寫成 column vector，即 $\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}$。故得
$$A^{\mathrm{t}}=\begin{bmatrix}1&-1\\2&-2\\3&-3\end{bmatrix}.$$
注意：A^{t} 的 1-st, 2-nd 和 3-rd row 也恰為 A 的 1-st, 2-nd 和 3-rd column 寫成 row 而得。

由上面的例子我們看到，當 $A\in M_{m\times n}$，對於 $1\leq j\leq n$, A^{t} 的 j-th row 就是將 A 的 j-th column 寫成 row vector。事實上若將 A 寫成 $A=[a_{ij}]$。對於 $1\leq i\leq m$，A^{t} 的 i-th column 就是將 A 的 i-th row $\begin{bmatrix}a_{i1}&\cdots&a_{in}\end{bmatrix}$ 寫成 column vector $\begin{bmatrix}a_{i1}\\ \vdots\\ a_{in}\end{bmatrix}$。因此 A^{t} 的 $(1,i)$-th entry 就是 A 的 $(i,1)$-th entry a_{i1}，而 A^{t} 的 $(2,i)$-th entry 就是 A 的 $(i,2)$-th entry a_{i2}。依此類推我們可以得到對於 $1\leq j\leq n$，A^{t} 的 (j,i)-th entry 就是 A 的 (i,j)-th entry a_{ij}。也就是說若我們將 A^{t} 寫成 $A^{\mathrm{t}}=[a'_{sk}]$，則 $1\leq s\leq n$，$1\leq k\leq m$ 且 $a'_{sk}=a_{ks}$。因此對於 $1\leq j\leq n$，A^{t} 的 j-th row $\begin{bmatrix}a'_{j1}&\cdots&a'_{jm}\end{bmatrix}$ 即為 $\begin{bmatrix}a_{1j}&\cdots&a_{mj}\end{bmatrix}$, 恰為 A 的 j-th column 寫成 row vector。我們將以上的討論寫成以下的結論。

Lemma 2.2.3. *假設 $A=[a_{ij}]\in M_{m\times n}$ 且 $A^{\mathrm{t}}=[a'_{sk}]\in M_{n\times m}$。則對於 $1\leq s\leq n,\ 1\leq k\leq m,$ $a'_{sk}=a_{ks}$ 且 A^{t} 的 s-th row 就是將 A 的 s-th column 寫成 row vector。*

由 Lemma 2.2.3，以後要談論 A 和 A^{t} 間的關係，我們可以用 row 換成 column、column 換成 row 以及 (i,j)-th entry 換成 (j,i)-th entry 三種看法處理。現在我們來看矩陣取 transpose 的基本性質：

Proposition 2.2.4. *假設 A,B 為 $m\times n$ matrix，C 為 $n\times l$ matrix。我們有以下之性質：*

(1) $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}=A$.

(2) $(A+B)^{\mathrm{t}}=A^{\mathrm{t}}+B^{\mathrm{t}}$.

(3) $(AC)^{\mathrm{t}}=C^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$.

Proof. 首先觀察 A^{t} 為 $n\times m$ matrix，故 $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}$ 為 $m\times n$ matrix，與 A 階數相同。同樣的，$A^{\mathrm{t}}+B^{\mathrm{t}}$ 為 $n\times m$ matrix 與 $(A+B)^{\mathrm{t}}$ 的階數相同。另一方面 C^{t} 為 $l\times n$ matrix，故 $C^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ 為 $l\times m$ matrix。而 AC 為 $m\times l$ matrix，所以 $(AC)^{\mathrm{t}}$ 為 $l\times m$ matrix 與 $C^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ 階數相同。

(1) 因 $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}$ 與 A 皆為 $m\times n$ matrix，對於 $1\leq i\leq n$，我們只要檢查 $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}$ 的 i-th column 就是 A 的 i-th column。然而 $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}$ 的 i-th column 依定義知就是 A^{t} 的 i-th row 寫成 column vector，而 A^{t} 的 i-th row 依 Lemma 2.2.3 就是 A 的 i-th column。故得證 $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}=A$。

(2) 因 $A^{\mathrm{t}}+B^{\mathrm{t}}$ 與 $(A+B)^{\mathrm{t}}$ 皆為 $n\times m$ matrix，對於 $1\leq i\leq m$，我們只要檢查 $A^{\mathrm{t}}+B^{\mathrm{t}}$ 的 i-th column 就是 $(A+B)^{\mathrm{t}}$ 的 i-th column。依定義 $A^{\mathrm{t}}+B^{\mathrm{t}}$ 的 i-th column 就是 A^{t} 和 B^{t} 的 i-th column 之和。依 transpose 定義知它就是 A 和 B 的 i-th row 之和。另一方面，$(A+B)^{\mathrm{t}}$ 的 i-th column 就是 $A+B$ 的 i-th row，也就是 A 和 B 的 i-th row 之和。得證 $(A+B)^{\mathrm{t}}=A^{\mathrm{t}}+B^{\mathrm{t}}$。

(3) 由於 $(AC)^{\mathrm{t}}$ 的 column 是由 AC 的 row 所決定，而我們尚未討論 A 和 C 相乘 row 之間的關係，所以這裡我們利用 entry 相同來證明相等。我們將這些矩陣分別用 $A=[a_{ij}]$, $A^{\mathrm{t}}=[a'_{ji}]$, $C=[c_{sk}]$, $C^{\mathrm{t}}=[c'_{ks}]$ 表示。對於 $1\leq t\leq l$, $1\leq i\leq m$，$(AC)^{\mathrm{t}}$ 的 (k,i)-th entry 為 AC 的 (i,k)-th entry，由式子 (2.13) 知應為

$$a_{i1}c_{1k}+a_{i2}c_{2k}+\cdots+a_{in}c_{nk}.$$

另一方面, $C^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ 的 (k,i)-th entry 為

$$c'_{k1}a'_{1i}+c'_{k2}a'_{2i}\cdots+c'_{kn}a'_{ni}.$$

利用 Lemma 2.2.3 知此即為

$$c_{1k}a_{i1}+c_{2k}a_{i2}\cdots+c_{nk}a_{in}.$$

故得證 $(AC)^{\mathrm{t}}=C^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$。 □

Question 2.7. 假設 A 為 $m\times n$ *matrix*，$r\in\mathbb{R}$。試證明 $(rA)^{\mathrm{t}}=rA^{\mathrm{t}}$。

一個 $n\times n$ square matrix，若滿足 $A^{\mathrm{t}}=A$，我們稱 A 為 *symmetric matrix*。上一節介紹過的 diagonal matrix 就是 symmetric matrix。以後我們會學到 symmetric matrix 的重要性質，現在我們先看和 symmetric matrix 有關的幾個簡單情形。

Corollary 2.2.5. 假設 A 為 $n\times n$ *square matrix*，B 為 $m\times n$ *matrix*。以下皆為 *symmetric matrix*

$$A+A^{\mathrm{t}}, BB^{\mathrm{t}}, B^{\mathrm{t}}B.$$

Proof. 由 Proposition 2.2.4，我們有 $(A+A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}=A^{\mathrm{t}}+(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}=A^{\mathrm{t}}+A$，故知 $A+A^{\mathrm{t}}$ 為 symmetric matrix。另一方面，$(BB^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}=(B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}=BB^{\mathrm{t}}$，故得 BB^{t} 為 symmetric matrix。同理可得 $B^{\mathrm{t}}B$ 亦為 symmetric matrix。 □

利用 Proposition 2.2.4，我們可以從 row 的角度處理矩陣的乘法。首先我們看一個 $1\times m$ matrix 乘上一個 $m\times n$ matrix 的情形。假設 $A\in M_{1\times m},B\in M_{m\times n}$，令

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_m\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}.$$

則由 $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$，以及矩陣右邊乘 column vector 的定義得

$$(AB)^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{2n} \end{bmatrix} + \cdots + a_m \begin{bmatrix} b_{m1} \\ b_{m2} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{bmatrix}.$$

亦即 $(AB)^{\mathrm{t}} = a_1\,({}_1\mathbf{b})^{\mathrm{t}} + a_2\,({}_2\mathbf{b})^{\mathrm{t}} + \cdots + a_m\,({}_m\mathbf{b})^{\mathrm{t}}$，這裡 $({}_i\mathbf{b})^{\mathrm{t}}$ 指的是將 B 的 i-th row 取轉置（寫成 column 的形式）。故利用 Proposition 2.2.4 將 $(AB)^{\mathrm{t}}$ 再取轉置還原得

$$AB = a_1\,({}_1\mathbf{b}) + a_2\,({}_2\mathbf{b}) + \cdots + a_m\,({}_m\mathbf{b}).$$

也就是說

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \end{bmatrix} + \cdots + a_m \begin{bmatrix} b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

現在我們來看一般的情形。設 $A = [a_{ij}]$ 為 $m \times n$ matrix 以及 $B = [b_{jk}]$ 為 $n \times l$ matrix。考慮 $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$。依定義 $B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ 的 i-th column，為 B^{t} 右邊乘上 A^{t} 的 i-th column。然而 A^{t} 的 i-th column 為 A 的 i-th row 取轉置，即 $({}_i\mathbf{a})^{\mathrm{t}}$。也就是說 $(AB)^{\mathrm{t}}$ 的 i-th column 為 $B^{\mathrm{t}}({}_i\mathbf{a})^{\mathrm{t}}$。利用 Proposition 2.2.4 再取轉置還原得，AB 的 i-th row 為

$$(B^{\mathrm{t}}({}_i\mathbf{a})^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = (({}_i\mathbf{a})^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}(B^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} =_i \mathbf{a}B.$$

換言之，我們有以下的圖示：

$$AB = \begin{bmatrix} - & {}_1\mathbf{a} & - \\ - & {}_2\mathbf{a} & - \\ & \vdots & \\ - & {}_m\mathbf{a} & - \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} - & {}_1\mathbf{a}B & - \\ - & {}_2\mathbf{a}B & - \\ & \vdots & \\ - & {}_m\mathbf{a}B & - \end{bmatrix}. \qquad (2.15)$$

結合式子 (2.14)，我們有以下之結果：

Proposition 2.2.6. 設 $A = [a_{ij}]$ 為 $m \times n$ *matrix* 以及 $B = [b_{jk}]$ 為 $n \times l$ *matrix*。則對於 $1 \leq i \leq m$，AB 的 *i-th row* 為

$${}_i\mathbf{a}B = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix} = a_{i1} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \end{bmatrix} + \cdots + a_{in} \begin{bmatrix} b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix}.$$

Exercise 2.5. 給定一實係數多項式 $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$。對任意 n 階方陣 A，定義 $f(A)$ 為 n 階方陣 $a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$，其中 I_n 為 n 階單位矩陣。

(1) 若 A 為 diagonal matrix 證明 $f(A)$ 亦為 diagonal matrix。

(2) 假設 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$。對任意 n 階方陣 A, B，若 A 和 B 為 commutative，證明矩陣 $f(A)$ 和 $g(B)$ 亦為 commutative。

Exercise 2.6. 假設 $A = [a_{ij}] \in M_{3\times 4}$, $B = [b_{ij}] \in M_{4\times 3}$ 其中 $a_{ij} = i + j$, $b_{ij} = i \cdot j$.

(1) 試利用 A 的 2nd row 計算 AB 的 2nd row。

(2) 試完整寫下矩陣 A^{t} 和 B^{t}。

(3) 請說明可以用 $(AB)^{\mathrm{t}}$ 哪個 row 或是 column 來求 AB 的 3rd column（只看每個 entry 是否一致，不分寫成 row vector 或 column vector），並利用 A^{t}, B^{t} 的乘法（注意順序）求出。

Exercise 2.7. 假設 A 和 B 皆為 symmetric matrices。證明 AB 為 symmetric matrix 若且唯若 A, B 為 commutative。

Exercise 2.8. 令 $A = [a_{ij}]$ 為 4 階方陣, 其中 $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \neq j; \\ 0, & \text{if } i = j. \end{cases}$ 若存在 4 階 square matrix B 使得 $BA = AB = I_4$，則稱 A 為 invertible matrix 且稱 B 為其 inverse，記為 A^{-1}。

(1) 請用 **row** 的看法分別計算 A^2 的每個 row。

(2) 找到一個 2 次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(A)$ 為零矩陣，並依此說明 A 為 invertible 且寫下 A^{-1}。