

2.3. Elementary Matrix

前面提過，我們將聯立方乘式用矩陣 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 來表示，是想利用矩陣的乘法來處理聯立方程式。事實上 elementary row operation 也可以看成是矩陣的乘法運算。首先考慮 $n \times n$ 的單位矩陣 I_n (即 I_n 的對角線位置皆為 1, 其他位置為 0)。若用 i -th row 和 j -th row 交換的 type 1 elementary row operation 將 I_n 轉換成矩陣 E_1 ，可得

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

同樣的若使用 type 2 elementary row operation 將 I_n 的 i -th row 乘上非零實數 r 轉換成矩陣 E_2 ，可得

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & r & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

最後若使用 type 3 elementary row operation 將 I_n 的 i -th row 乘上實數 r 加到 I_m 的 j -th row 所得的矩陣為 E_3 ，可得

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & r & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

這樣的矩陣我們稱之為 *elementary matrix*。而我們分別稱 E_1, E_2, E_3 為 *type 1*, *type 2* 以及 *type 3* 的 elementary matrix。

我們知道矩陣 A 左邊乘上另一矩陣 E ，可以視為 E 的 row 對矩陣 A 的作用。設 $A = [a_{ij}]$ 為 $m \times n$ matrix。首先觀察 identity matrix I_m 對 A 的作用。由於 I_m 的 i -th row 為

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & \hat{i} & & \end{bmatrix}$$

即 i -th entry 為 1，其他 entry 皆為 0。所以依 Proposition 2.2.6， $I_m A$ 的 i -th row 為

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} A = 0_1 \mathbf{a} + \cdots + 1_i \mathbf{a} + \cdots + 0_m \mathbf{a} = i \mathbf{a},$$

(就是將 1 乘上 A 的 i -th row，而將 0 乘上 A 的其他 row 再加起來，故為 A 的 i -th row) 換言之，將 I_m 乘在 A 的左邊，會將 A 的每一個 row 都固定不變，所以知 $I_m A = A$ 。現若 $j \neq i$ 且 E 為將 I_m 的 i -th row 改為 j -th entry 為 1 其他 entry 為 0，而 i -th row 以外的其他 row 不變。從上面的看法知 EA 的 i -th row 會是 A 的 j -th row，也就是說 EA 會是將 A 的 i -th row 換成 A 的 j -th row，而其他的 row 不動的矩陣。

現若用 i -th row 和 j -th row 交換的 type 1 elementary row operation 將 I_m 轉換成矩陣 E ，則利用前述的說法， EA 的 i -th row 是 A 的 j -th row；而 EA 的 j -th row 是 A 的 i -th row，而其他的 row 都不變。換言之： EA 就是將 A 利用 i -th row 和 j -th row 交換這樣的 type 1 elementary row operation 變換所得的矩陣。

同樣的若將 I_m 的 i -th row 乘上非零實數 r 所得的 type 2 elementary matrix 為 E ，則很容易看出 EA 的 i -th row 就是將 A 的 i -th row 乘上 r ，而其餘的 row 不變。也就是說： EA 就是將 A 的 i -th row 乘上非零實數 r 這樣的 type 2 elementary row operation 變換所得的矩陣。

最後若將 I_m 的 i -th row 乘上實數 r 加到 I_m 的 j -th row 所得的 type 3 elementary matrix 為 E ，則因 E 的 j -th row 的 i -th entry 為 r ， j -th entry 為 1。故由 Proposition 2.2.6， EA 的 j -th row 就是將 r 乘上 A 的 i -th row 後再加上 A 的 j -th row，而其他的 row 都不變。換言之： EA 就是將 A 的 i -th row 乘上實數 r 加到 A 的 j -th row 這樣的 type 3 elementary row operation 變換所得的矩陣。

從上面的說明我們知道：對一個 $m \times n$ matrix 做一個 elementary row operation，事實上就是將此矩陣左邊乘上相對應的 elementary matrix。(2.16), (2.17), (2.18) 就是 elementary matrix 的三種形式。

當我們對一個 $m \times n$ matrix A ，進行多次的 elementary row operations，就是將 A 左邊逐次的乘上相對應的 elementary matrix。比方說做兩次 elementary row operations，就是將 A 的左邊乘上第一次 elementary row operation 所對應的 elementary matrix E_1 。做第二次時就是將 $E_1 A$ 左邊再乘上第二次 elementary row operation 所對應的 elementary matrix E_2 。故所得的矩陣 $E_2(E_1 A)$ 就是將 A 做這兩次 elementary row operations 所得的矩陣。又由於矩陣乘法的結合律，我們又可以將 $E_2(E_1 A)$ 寫成 $(E_2 E_1) A$ 。同理，對一個矩陣 A 進行一連串的 elementary row operations，就是將 A 左邊乘上一個矩陣，而這個矩陣就是這一連串 elementary row operations 所對應的 elementary matrices 的乘積。不過要注意，這些 elementary matrices 乘在一起的順序很重要，因為 elementary matrices 之間的乘法不一定可以交換（這也等同於基本列運算之間不一定可以交換）。

Question 2.8. 試找出那些同階的 elementary matrices 其相乘是不可以交換的。

Example 2.3.1. 考慮 Example 1.1.1 的情形。 A 是 3×4 matrix 且 B 是將 A 的第一個 row 和第二個 row 交換所得。考慮將 I_3 的第一個 row 和第二個 row 交換所得的 elementary

matrix $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。可得 $E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = B$ 。

同樣的 C 是由 B 的第二個 row 乘上 2 所得，所以我們考慮將 I_3 的第二個 row 乘上 2 所得的 elementary matrix $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。可得

$$E_2 B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = C.$$

最後 D 是將 C 的第三個 row 乘上 -3 加到第一個 row，所以我們考慮將 I_3 的第三個 row 乘上 -3 加到第一個 row 所得的 elementary matrix $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。可得

$$E_3 C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = D. \quad \#$$

上面所提這種將一個矩陣做 elementary row operation 可視為將此矩陣左邊乘上其對應的 elementary matrix 的看法，將來對我們探討矩陣的性質是很有幫助的。這種看法的互換，也時能讓我們得到有趣的結果。例如前面提過一個矩陣經由一個 elementary row operation 轉變成另一個矩陣後，我們可以再用相同 type 的 elementary row operation 將其轉換回原來的矩陣。這個事實用 elementary matrices 的角度來看，可以有以下的看法：

- (1) 設 E_1 是將 I_m 的 i -th row 和 j -th row 互換的 type 1 elementary matrix。我們將 E_1 的 i -th row 和 j -th row 再互換就可轉換回 identity matrix I_m 。所以我們有 $E_1 E_1 = I_m$ 。
- (2) 設 E_2 是將 I_m 的 i -th row 乘上非零實數 r 的 type 2 elementary matrix。我們將 E_2 的 i -th row 乘上 r^{-1} 就可轉換回 I_m 。所以若令 E'_2 為將 I_m 的 i -th row 乘上 r^{-1} 的 type 2 elementary matrix，我們有 $E'_2 E_2 = I_m$ 。同理可得 $E_2 E'_2 = I_m$ 。
- (3) 設 E_3 是將 I_m 的 i -th row 乘上實數 r 加到 j -th row 所得的矩陣的 type 3 elementary matrix。我們將 E_3 的 i -th row 乘上 $-r$ 再加到 j -th row 就可轉換回 I_m 。所以若令 E'_3 為將 I_m 的 i -th row 乘上 $-r$ 的 type 3 elementary matrix，我們有 $E'_3 E_3 = I_m$ 。同理可得 $E_3 E'_3 = I_m$ 。

我們知道當一個 $m \times m$ 的矩陣 A 若可找到矩陣 B 使得 $BA = AB = I_m$ ，則稱 A 為一個 invertible matrix (可逆矩陣)，且 B 為 A 的 inverse (反矩陣)。從上面的探討我們有以下之結論：

Proposition 2.3.2. 假設 E 是一個 elementary matrix，則 E 為 invertible 且 E 的 inverse 是和 E 相同 type 的 elementary matrix。

既然有所謂的 elementary row operations 當然也會有 elementary column operations。它的概念只是將 row operation 對 row 的動作改為對 column 的動作。我們將一個矩陣的 i -th column 和 j -th column 對調，這一個動作及稱為 type 1 的 elementary column operation。若將矩陣的 i -th column 上的數皆乘上非零實數 r ，則稱 type 2 的 elementary

column operation。至於 type 3 的 elementary column operation 就是把矩陣的 i -th column 乘上 r 後加到其 j -th column。由於 column operations 並未用在解聯立方乘組的問題，所以這裡我們僅約略介紹其相關的概念，不再像前面依樣詳述。事實上 column operations 的概念和 row operations 是相呼應的，大家可以用前面探討的方式檢驗。

將 identity matrix I_m 做 elementary column operation 後會得到甚麼樣的矩陣呢？結果也會是前面提到的 elementary matrix（這也是 elementary matrix 沒有區分 row 和 column 的原因）。例如將 I_m 的 i -th column 和 j -th column 互換所得的矩陣就是將 I_m 的 i -th row 和 j -th row 互換的 type 1 elementary matrix。而將 I_m 的 i -th column 乘上非零實數 r 的矩陣，就是將 I_m 的 i -th row 乘上 r 的 type 2 elementary matrix。不過要注意：將 I_m 的 i -th column 乘上實數 r 加到 j -column 所得的矩陣不是將 I_m 的 i -th row 乘上實數 r 加到 j -th row 所得的 elementary matrix；而是將 I_m 的 j -th row 乘上實數 r 加到 i -th row 所得的矩陣的 type 3 elementary matrix。這一部分請務必親自檢驗，就能了解其中原因。

既然一個 elementary matrix 同時可對應到 elementary row operation 也可對應到 elementary column operation，那要如何區分呢？別忘了，矩陣的乘法是沒有交換性的。前面我們知道：當一個 elementary matrix E 乘在一個矩陣 A 的左邊時，所得的矩陣 EA 會是對 A 做 E 所對應的 elementary row operation。而若將 E 乘在矩陣 B 的右邊，則所得的矩陣 BE 便會是對 B 做 E 所對應的 elementary column operation。為了方便起見，我們綜合成以下的結論：

Theorem 2.3.3. 假設 A 是一個 $m \times n$ matrix。若 E 是對 I_m 做 elementary row operation 所得的 elementary matrix，則 EA 就會是對 A 作相對應的 elementary row operation 所得的矩陣。若 E' 是對 I_n 做 elementary column operation 所得的 elementary matrix，則 AE' 就會是對 A 作相對應的 elementary column operation 所得的矩陣。

Example 2.3.4. 考慮

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix}$$

E_1 可視為將 I_3 的 2-nd row 和 3-rd row 交換；也可視為將 I_3 的 2-nd column 和 3-rd column 交換。事實上我們有

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 22 & 33 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 11 & 33 & 22 \end{bmatrix}.$$

E_2 可視為將 I_3 的 1-st row 乘以 10；也可視為將 I_3 的 1-st column 乘以 10。事實上我們有

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ -1 & -2 & -3 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix},$$

$$AE_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -10 & -2 & -3 \\ 110 & 22 & 33 \end{bmatrix}.$$

E_3 可視為將 I_3 的 3-rd row 乘以 10 加到 1-st row；也可視為將 I_3 的 1-st column 乘以 10 加到 3-rd column。事實上我們有

$$E_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 111 & 222 & 333 \\ -1 & -2 & -3 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix},$$

$$AE_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 11 & 22 & 33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 13 \\ -1 & -2 & -13 \\ 11 & 22 & 143 \end{bmatrix}. \quad \#$$

這裡我們再說明一下：當 A 是一個 $m \times n$ matrix，因為 A 有 m 個 row，所以乘在左邊的 elementary matrix（對應到 elementary row operation）必須是一個 m 階方陣。同樣的，因為 A 有 n 個 column，所以乘在右邊的 elementary matrix（對應到 elementary column operation）必須是一個 n 階方陣。

有時我們需知道一個矩陣經由一連串的 elementary row operations，其左邊到底是乘上哪一個矩陣。當然我們可以如前述將所對應的 elementary matrices 乘在一起即可，但這樣做其實很麻煩費時。接下來我們來看一個很“clever”的方法，可以在做 elementary row operation 時便幫我們將這個矩陣記錄下來。這個方法就是：若要對一個 $m \times n$ matrix A 做 elementary row operations，我們先寫下一個 augmented matrix $[A|I_m]$ 。也就是一個 $m \times (n+m)$ 的增廣矩陣，其左邊 n 個 columns（即前 n 個 columns）為矩陣 A ；而右邊 m 個 columns（即後 m 個 column）為 I_m 。現將 A 做第一次的 elementary row operation，假設其對應的 elementary matrix 為 E_1 ，則 A 被轉換為 E_1A 。現若對 $[A|I_m]$ 做相同的 elementary row operation 的話，所得的結果會是 $E_1[A|I_m]$ 。然而此時原先 A 的部分會變成 E_1A ，而 I_m 的部分經同樣的 elementary row operation，所以 I_m 這部分會是 E_1I_m 。因此我們知

$$E_1[A|I_m] = [E_1A|E_1I_m] = [E_1A|E_1].$$

也就是說：當我們對 $[A|I_m]$ 做同樣的 elementary row operation，所得的增廣矩陣其左邊就是將 A 做此 elementary row operation 所得的矩陣；而右邊就是此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix。接著當我們做下一個 elementary row operation。假設此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_2 ，則此 elementary row operation 對 $[E_1A|E_1]$ 作用後所得的矩陣便是 $E_2[E_1A|E_1] = [E_2(E_1A)|E_2E_1]$ 。這樣繼續下去，當我們對增廣矩陣 $[A|I_m]$ 進行一連串的 elementary row operations 後，所得的矩陣 $[A'|E]$ 其左邊 A' 就是 A 經由這一連串的 elementary row operations 作用後所得的矩陣；而右邊的 E 就是這些 elementary row operations 所對應的 elementary matrices 依序從右到左相乘所得的結果，因此 $EA = A'$ 。我們有以下的結論：

Lemma 2.3.5. 假設 A 為 $m \times n$ matrix。若將 A 經由一連串的 elementary row operations 轉換成 A' ，則存在一個 $m \times m$ matrix E 使得 $EA = A'$ ，其中 E 為這一連串 elementary row operations 所對應的 elementary matrix 由右而左依序相乘的乘積。事實上若將 augmented

matrix $[A|I_m]$ 經由同樣的 *elementary row operations* 作用後，所得的 *augmented matrix* 就是 $[A'|E]$ ，且 $EA = A'$ 。

Example 2.3.6. 將矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & -8 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

化為 reduced echelon form。我們要找到 elementary matrices 的乘積 E 使得 EA 為此 reduced echelon form。

首先寫下 augmented matrix

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -4 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

並將此 augmented matrix 的 1-st 和 2-nd row 交換，得

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

接著我們將 augmented matrix 的 1-st row 乘上 -2 加到 2-nd row 上，得

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

然後將 augmented matrix 的 1-st row 乘上 -4 加到 3-rd row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right].$$

繼續將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 $1/2$ 得

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right].$$

最後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 -1 加到 1-st row 得 reduced echelon form

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right].$$

令最後所得的 augmented matrix 為 $[A'|E]$ ，我們檢查是否 A 的 reduced echelon form A' 就是 EA 。事實上，我們確有

$$EA = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & -8 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

另外我們想確認 E 確為這五個 elementary row operations 所對應的 elementary matrices 的乘積。因為 A 為 3×4 matrix，所以第一個 elementary row operation 所對應的 elementary matrix E_1 就是將 3×3 的 identity matrix I_3 的 1-st 和 2-nd row 交換；而第二個 elementary matrix E_2 為將 I_3 的 1-st row 乘上 -2 加到 2-nd row 上。第三個 elementary matrix E_3 為

將 I_3 的 1-st row 乘上 -4 加到 3-rd row 上。接下來的 elementary matrix E_4 為將 I_3 的 2-nd row 乘上 $1/2$ ；而最後一個 elementary matrix E_5 為將 I_3 的 2-nd row 乘上 -1 加到 1-st row 上。也就是說：我們有

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

將這五個 elementary matrices 由右而左依序相乘，確實得

$$E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = E. \quad \sharp$$

Question 2.9. 假設 A 為 $m \times n$ matrix. 若要記錄對 A 所做的 column operations 所對應的 elementary matrices 的乘積，增廣矩陣應如何擺放？

Exercise 2.9. 固定一正整數 m , 考慮所有 $m \times 3$ matrices.

- (1) 試找到一個 3×3 matrix E_1 使得對任意 $A \in M_{m \times 3}$, 皆有 AE_1 的 1-st column 就是 A 的 1-st column, 而 AE_1 的 2-nd column 恰為 A 的 3-rd column 且 AE_1 的 3-rd column 恰為 A 的 2-nd column.
- (2) 試找到一個 3×3 matrix E_2 使得對任意 $A \in M_{m \times 3}$, 皆有 AE_2 的 1-st column 就是 A 的 1-st column, 而 AE_2 的 2-nd column 也是 A 的 2-nd column 且 AE_2 的 3-rd column 恰為 A 的 3-rd column 的 4 倍.
- (3) 試找到一個 3×3 matrix E_3 使得對任意 $A \in M_{m \times 3}$, 皆有 AE_3 的 1-st column 就是 A 的 1-st column 減去 A 的 3-rd column, 而 AE_3 的 2-nd column 恰為 A 的 2-rd column 且 AE_3 的 3-rd column 恰為 A 的 3-rd column.

Exercise 2.10. 固定一正整數 n , 本題只考慮 n 階方陣。

- (1) 試說明 elementary matrix 的 transpose 亦為 elementary matrix (需說明原來對應的 elementary row operation 轉置後其所對應的 elementary row operation 為何)。並說明哪些 type 的 elementary matrix 是 symmetric (對稱)。
- (2) 這些 symmetric elementary matrices 中哪些相乘後仍為 symmetric? 並利用上週 Exercise 2.7 的結果說明這些 symmetric elementary matrices 哪些是 commutative (乘法可交換)。

Exercise 2.11. 令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且令 A' 為 A 的 reduced echelon form.

- (1) 試找到一個矩陣 E 使得 $EA = A'$, 並說明若對任意聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆會和 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ 為 equivalent, 則 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{b}'$ 的關係。
- (2) 試利用對 A' 做 elementary column operations 的方式, 找到矩陣 E' 使得 $EAE' = M$ 。