2.5.2. 解的唯一性. 所謂聯立方程組解的唯一性，指的是假設聯立方程組有解時，探討其解是否唯一。所以唯一性並不涉及解是否存在的問題。

給定 $A \in M_{m\times n}$ 以及 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$。如果 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解，則 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解和 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解（這裡 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的零向量）息息相關，我們有以下之定理：

Lemma 2.5.4. 給定 $A \in M_{m\times n}$ 以及 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 且假設 $\mathbf{x} = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ 是聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解。則

(1) 若 $\mathbf{x} = \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^n$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解，則 $\mathbf{x} = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$ 為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解。

(2) 若 $\mathbf{x} = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解，則 $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解。

Proof. (1) 假設 $\mathbf{x} = \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^n$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解，意即 $A\mathbf{c}' = \mathbf{b}$。由已知 $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ 得

$$A(\mathbf{c}' - \mathbf{c}) = A\mathbf{c}' - A\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

因此 $\mathbf{x} = \mathbf{c}' - \mathbf{c}$ 會是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解。

(2) 若 $\mathbf{x} = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解，則

$$A(\mathbf{c} + \mathbf{u}) = A\mathbf{c} + A\mathbf{u} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

得證 $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解。 □

Lemma 2.5.4 告訴我們若已知 $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ 為 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一組解，且知道 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 所有的解，就能利用 $\mathbf{c}$ 以及 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 所有的解得到 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 所有的解。所以了解 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 所有的解是很重要的課題（以後我們會深入探討）。回顧一下 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 這樣的 linear system，我們稱之為 homogeneous linear system。Homogeneous linear system 一定有解。事實上當 $A \in M_{m\times n}$ 時，$x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ 就是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一組解。這組解 $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ 因為不需任何計算就能得到，我們稱之為 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的 *trivial solution*。注意 trivial solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 這裡的 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的零向量，而 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 這裡的 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的零向量。所以雖然我們用同樣的符號表示，但當 $n \neq m$ 時它們是不同的，大家需區分清楚。當一個 homogeneous linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 除了 trivial solution 外還有其他的 solution（即解不唯一），我們稱這些不為 $\mathbf{0}$ 的 solution 為 *nontrivial solution*。

從 Lemma 2.5.4 我們知，若 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 沒有 nontrivial solution（即解唯一），則對於 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$，若 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解，其解必唯一。由這觀點，我們可以得到以下關於聯立方程組解的唯一性的重要定理。

Theorem 2.5.5. 假設 $A \in M_{m\times n}$。以下各敘述是等價的：

(1) 若 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 且聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解，則解唯一。

(2) *Homogeneous system* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 沒有 *nontrivial solution*。

(3) $\mathrm{rank}(A) = n$。

(4) 存在 $n \times m$ *matrix* B 使得 $BA = I_n$。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2)：利用反證法。假設 $\mathbf{x}=\mathbf{u}$ 為 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一組 nontrivial solution 而 $\mathbf{x}=\mathbf{c}$ 為 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解，則由 Lemma 2.5.4 知 $\mathbf{x}=\mathbf{c}+\mathbf{u}\neq\mathbf{c}$ 會是 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的另一組解。此與 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解唯一相矛盾，故知 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 沒有 nontrivial solution。

(2) $\Rightarrow$ (3)：$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 沒有 nontrivial solution, 表示 A 化成 echelon form 後沒有 free variables. 也就是說所有的 variables 皆為 pivot variables. 因此 pivot 的個數就是未知數的個數 n, 故得 $\operatorname{rank}(A)=n$.

(3) $\Rightarrow$ (4)：假設 $\operatorname{rank}(A)=n$，即 A 化為 echelon form 後，其 pivot 的個數為 n。考慮將 A 化為 reduced echelon form A'。此時 A' 由於有 n 個 pivot，所以每一個 pivot 必分別在 A' 前面 n 個 row 上。而又 A' 為 $m\times n$ matrix，有 n 個 column。所以 A' 每一個 pivot 必落在 (i,i)-th entry，其中 $1\leq i\leq n$。又因為 A' 為 reduced echelon form，此 n 個 pivots 的值皆為 1。然而 reduced echelon form 每一個 pivot 所在的 column，除了 pivot 所在位置外，其他位置應為 0。所以我們知 A' 必為以下的 matrix $A'=\begin{bmatrix} I_n \\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$，即 A' 的前 n 個 row 就是 I_n。由 Lemma 2.3.5，我們知存在 $m\times m$ matrix E 使得 $EA=A'$。現若令 E 的 i-th row 為 ${}_i\varepsilon$，由 row 的觀點看矩陣乘法 (參見圖示 (2.15)) 我們有

$$EA=\begin{bmatrix} — & {}_1\varepsilon & — \\ & \vdots & \\ — & {}_n\varepsilon & — \\ & \vdots & \\ — & {}_m\varepsilon & — \end{bmatrix} A=\begin{bmatrix} — & {}_1\varepsilon A & — \\ & \vdots & \\ — & {}_n\varepsilon A & — \\ & \vdots & \\ — & {}_m\varepsilon A & — \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ & \mathbf{0} & \end{bmatrix}.$$

現若令 B 為 $n\times m$ matrix，對於 $i=1,\ldots,n$ 其 i-th row 為 ${}_i\varepsilon$ （即 B 為截取 E 的前 n 個 row 的 $n\times m$ matrix），則由前述的矩陣乘法性質知

$$BA=\begin{bmatrix} — & {}_1\varepsilon & — \\ & \vdots & \\ — & {}_n\varepsilon & — \end{bmatrix} A=\begin{bmatrix} — & {}_1\varepsilon A & — \\ & \vdots & \\ — & {}_n\varepsilon A & — \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=I_n.$$

(4) $\Rightarrow$ (1): 我們利用反證法假設 $\mathbf{c}\neq\mathbf{c}'\in\mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{x}=\mathbf{c},\mathbf{x}=\mathbf{c}'$ 皆為 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的一組解，亦即：$A\mathbf{c}=\mathbf{b}$ 且 $A\mathbf{c}'=\mathbf{b}$。現已知存在 $B\in M_{n\times m}$ 使得 $BA=I_n$，故得 $B\mathbf{b}=B(A\mathbf{c})=(BA)\mathbf{c}=\mathbf{c}$ 且 $B\mathbf{b}=B(A\mathbf{c}')=(BA)\mathbf{c}'=\mathbf{c}'$。此結果 $\mathbf{c}=B\mathbf{b}=\mathbf{c}'$ 與當初假設 $\mathbf{c}\neq\mathbf{c}'$ 相矛盾，故得證若 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解，則解必唯一。 □

再次提醒：Theorem 2.5.5 並不能知道聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 是否有解。它告訴我們若已知 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有 nontrivial solution，則 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 要不然無解；要不然會有無窮多解。

Question 2.11. 假設 $A\in M_{m\times n}$，$\mathbf{b},\mathbf{b}'\in\mathbb{R}^m$。若已知 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，$A\mathbf{x}=\mathbf{b}'$ 皆有解，且 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解唯一。是否 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}'$ 的也會唯一？

前面已提過：當 $A\in M_{m\times n}$，將 A 化為 echelon form 後其 pivot 的個數應小於等於 $\min\{m,n\}$。所以若 pivot 的個數為 n，則表示 $m\geq n$。換言之，若 $m<n$ 我們便知 pivot 的個數不可能等於 n。所以 Theorem 2.5.5 中的情況不可能發生。我們有以下的結論：

Corollary 2.5.6. 假設 $A \in M_{m\times n}$，其中 $m<n$。若 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ 且聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解，則解不唯一 (即必有兩個以上的解)。而且此時不會存在 $n\times m$ *matrix* B 使得 $BA=I_n$。

Proof. 由前所述，當 $m<n$ 時 A 化為 echelon form 後，其 pivot 的個數不可能為 n。故由 Theorem 2.5.5 知 homogeneous linear system $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有 nontrivial solution。亦即在 $\mathbb{R}^n$ 存在非零向量 $\mathbf{c}$ 使得 $\mathbf{x}=\mathbf{c}$ 為 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 之一組解。所以 Lemma 2.5.4 告訴我們：若 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解，則解不唯一。

另一方面 Theorem 2.5.5 也告訴我們若 pivot 的個數不是 n，則不會存在 $n\times m$ matrix B 使得 $BA=I_n$。 □

Theorem 2.5.5 也和 Theorem 2.5.2 一樣是很重要的定理，它可以告訴我們一些解聯立方程組的訊息。例如 Corollary 2.5.6 就是告訴我們當方程式的個數少於未知數的個數時，聯立方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 不可能有唯一解。

2.6. Invertible Matrix

所謂 invertible matrix 就是“可逆矩陣”。我們會發現只有 square matrix 才有可能是 invertible matrix。但並不是所有的 square matrix 都是 invertible matrix。這一節中我們會探討有關 invertible matrix 的相關性質，並介紹判斷一個方陣是否為 invertible 且找出其反矩陣的方法。

當初我們將聯立方程組用矩陣乘法的方式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 來表示，其中有一個很大的目的就是希望將解聯立方程式的問題此簡化成類似實數上解 $ax=b$ 的情形。在實數情況，當 $a\neq 0$ 時，$ax=b$ 的解就是很簡單的 $x=ba^{-1}$。但在矩陣的情形，我們沒有除法，所以只能借助乘法來幫忙。由於實數中 a^{-1} 有 $a^{-1}a=aa^{-1}=1$ 的性質，所以推廣這個概念至矩陣，我們便希望找到矩陣 B 滿足 BA 以及 AB 為 identity。不過當 $A\in M_{m\times n}$ 且 $m\neq n$ 時，由 Corollary 2.5.3 以及 Corollary 2.5.6，我們知道不可能存在 B 同時滿足 BA 和 AB 皆為 identity matrix (因為 $\operatorname{rank}(A)$ 不可能同時為 m 和 n)。所以我們僅對 $m=n$，即 A 為 square matrix 時有以下的定義：

Definition 2.6.1. 假設 $A\in M_{n\times n}$ 為 n 階 square matrix。若存在 $B\in M_{n\times n}$ 使得 $AB=BA=I_n$，則稱 A 為 *invertible*。反之，我們稱 A 為 *non-invertible*。

再一次強調當 A 不是方陣時，我們知 A 絕對不是 invertible。因此當我們不知矩陣 A 的階數時，絕對不能用存在 B 滿足 BA 為 identity 來說 A 為 invertible。必須檢查另一邊 AB 亦為 identity 才可。不過當 A 為 $n\times n$ square matrix，確實檢查單邊就可以確定 A 為 invertible。我們有以下的性質：

Theorem 2.6.2. 假設 $A\in M_{n\times n}$ 為 n 階 *square matrix*。則下列是等價的：

(1) A 為 *invertible matrix.*

(2) 存在 $B\in M_{n\times n}$ 使得 $BA=I_n$.

(3) $\text{rank}(A) = n$.

(4) 存在 $C \in M_{n\times n}$ 使得 $AC = I_n$.

Proof. 依 A 為 invertible 的定義，我們知若 A 為 invertible，則存在 $B \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$。故 $(1) \Rightarrow (2)$。

由 A 為 $n\times n$ matrix 以及 Theorem 2.5.5 知存在 $B \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$ 若且唯若 A 化為 echelon form 後 pivot 的個數為 n。故 $(2) \Leftrightarrow (3)$。

同理，由 A 為 $n\times n$ matrix 以及 Theorem 2.5.2 知存在 $C \in M_{n\times n}$ 使得 $AC = I_n$ 若且唯若 A 化為 echelon form 後 pivot 的個數為 n。故 $(3) \Leftrightarrow (4)$。

最後，由 A 化為 echelon form 後 pivot 的個數為 n 知存在 $B,C \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$ 以及 $AC = I_n$。若能證得 $C = B$，則由 $BA = AB = I_n$ 得證 A 為 invertible。然而由 $BA = I_n$，得 $(BA)C = I_nC = C$。又由 $(BA)C = B(AC) = BI_n = B$，得證 $B = C$。故 $(3) \Rightarrow (1)$。得證本定理。 □

當一個 $n\times n$ matrix 的 rank 為 n 時，有的書為了強調這個 rank 和階數相等的特殊情況，特別稱之為 *nonsingular matrix*。所以由 Theorem 2.6.2 我們知 invertible matrix 就是 nonsingular matrix。反之，non-invertible matrix 就是 singular matrix。不過為了讓大家不被這麼多名詞弄混，以後我們一律採用 invertible 和 non-invertible 這樣的說法；而不用 nonsingular 和 singular 這樣的說法。

由 Theorem 2.6.2 的證明我們知若 $A \in M_{n\times n}$ 且存在 $B,C \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$ 且 $AC = I_n$，則 $B = C$。我們自然會問有沒有可能存在不同的 $B,B' \in M_{n\times n}$ 皆滿足 $BA = I_n$ 以及 $B'A = I_n$。下一個定理告訴我們這樣的方陣其實是唯一的。

Corollary 2.6.3. 假設 $A \in M_{n\times n}$ 且 $B,B' \in M_{n\times n}$ 滿足 $BA = I_n$ 以及 $B'A = I_n$，則 $B = B'$。

Proof. 由 Theorem 2.6.2 我們知 A 為 invertible 且由其證明知 $BA = AB = I_n$ 以及 $B'A = AB' = I_n$。故
$$B = I_nB = (B'A)B = B'(AB) = B'I_n = B'.$$
□

由 Corollary 2.6.3，我們知道若 A 為 $n\times n$ invertible matrix，則僅會存在唯一的一個 $n\times n$ matrix B 滿足 $BA = AB = I_n$。它和 A 的關係如同在實數上非零實數的乘法的 inverse (乘法反元素)。所以我們給以下的定義：

Definition 2.6.4. 假設 $A \in M_{n\times n}$ 為 invertible matrix。我們稱唯一滿足 $BA = AB = I_n$ 的 $n\times n$ matrix B 為 A 的 *inverse* (反矩陣) 且用 A^{-1} 表示。

給定一 $n\times n$ invertible matrix A 由於其反矩陣是唯一的。所以若要確定 $B = A^{-1}$ 我們僅要檢查是否 $BA = I_n$ 或 $AB = I_n$ 即可。我們有以下之性質：

Proposition 2.6.5. 假設 $A,B \in M_{n\times n}$。我們有以下之性質：

(1) 若 A 為 *invertible*，則 A^{-1} 亦為 *invertible* 且

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(2) A 為 *invertible* 若且唯若 A^{t} 為 *invertible* 且此時

$$(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}.$$

(3) A,B 皆為 *invertible* 若且唯若 AB 為 *invertible* 且此時

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proof. 由 Theorem 2.6.2，我們要說一個 $n \times n$ matrix 為 invertible，只要找到 $B \in M_{n\times n}$ 使得 $BA = I_n$ 或 $AB = I_n$ 且此時由唯一性 (Corollary 2.6.3) 知 $B = A^{-1}$。

(1) 依定義 A^{-1} 亦為 $n\times n$ matrix 故 Theorem 2.6.2 適用。利用 $A^{-1}A = I_n$，得知 A^{-1} 亦為 invertible 且 $(A^{-1})^{-1} = A$。

(2) 依定義 A^{t} 亦為 $n\times n$ matrix 故 Theorem 2.6.2 適用。由 $A^{-1}A = I_n$ 利用 Proposition 2.2.4 得

$$I_n = (A^{-1}A)^{t} = A^{t}(A^{-1})^{t}$$

故知 A^{t} 為 invertible 且 $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$。反之若 A^{t} 為 invertible，由前知 $(A^{t})^{t}$ 為 invertible，故由利用 Proposition 2.2.4 $(A^{t})^{t} = A$ 得證 A 為 invertible。

(3) 依定義 AB 為 $n\times n$ matrix 故 Theorem 2.6.2 適用。現若 A,B 皆為 invertible，則由

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

得證 AB 為 invertible 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。反之，若 AB 為 invertible，且令 $C = (AB)^{-1}$。此時由 $(AB)C = I_n$ 得 $A(BC) = I_n$，故由假設 A 為 $n\times n$ matrix 以及 Theorem 2.6.2 得證 A 為 invertible。同理，由 $C(AB) = I_n$，得 $(CA)B = I_n$，得證 B 為 invertible。 □

要注意 Proposition 2.6.5 (3) 中由 AB invertible 推得 A,B 皆為 invertible 是需要用到 A,B 皆為 $n\times n$ matrix。否則當 $m \neq n$ 時，在 Theorem 2.5.2 中我們知道有可能 $A \in M_{m\times n}, C \in M_{n\times m}$ 滿足 $AC = I_m$。此時 I_m 為 invertible，但 A,C 皆為 non-invertible。同樣的，當 A,B 為方陣時，因為由 AB 為 invertible 可推得 A,B 皆為 invertible，故知 BA 亦為 invertible。也就是說當 A,B 為方陣時 AB 為 invertible 和 BA 為 invertible 是等價的。但在 A,B 不為方陣時，若 AB 為 invertible 會導致 BA 不為 invertible。

Question 2.12. 試舉例 A,B 不為 *invertible* 但 AB 為 *invertible*。同時也驗證此時 BA 為 *non-invertible*。

接下來我們探討如何判別一個具體的 $n\times n$ matrix 是否為 invertible，且若為 invertible 如何找出其 inverse。這個問題可藉由將方陣利用 elementary row operations 化為 reduced echelon form 來處理。事實上，當 A 為 $n\times n$ matrix，由 Theorem 2.6.2 我們知道 A 為 invertible 若且唯若 A 化為 echelon form 後其 pivot 的個數等於 n。因此我們只要將 A 化為 echelon form 後計算其 pivot 的個數，便可以知道 A 是否為 invertible。若 A 為 invertible，

即 pivot 的個數為 n，此時由於 A 的 reduced echelon form 為 $n\times n$ matrix，故得 A 的 reduced echelon form 為 I_n。也就是說我們可以用 elementary row operations 將 A 化為 I_n。故由 Lemma 2.3.5 我們知存在 $E\in M_{n\times n}$ 為一些 elementary matrix 的乘積使得 $EA=I_n$。事實上若將 augmented matrix $[A|I_n]$ 利用 elementary row operations 化為 $[I_n|E]$，則 $EA=I_n$。故此時 E 就是 A^{-1}。我們看以下的例子：

Example 2.6.6. 考慮矩陣

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -3 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ -3 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

我們要決定是否 A 是否為 invertible。若為 invertible，要找出 A^{-1}。

我們直接考慮 augmented matrix $[A|I_4]$，利用 elementary row operation 將 A 的部分轉換成 echelon form。首先將 1-st row 分別乘上 -1、3 加至 3-rd、4-th row，即

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right].$$

接著將 3-rd row 乘上 3/2 加至 4-th row 得

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1\end{array}\right].$$

此時 augmented matrix 左半部為 echelon form，其 pivot 的個數為 4，故知 A 為 invertible。我們繼續將左半部化為 reduced echelon form 便可得到 A^{-1}。

先將 4-th row 乘以 2，然後將所得的 augmented matrix 的 4-th row 分別乘上 -3、-4、1 加至 3-rd、2-nd 和 1-st row，即

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 & 1 & -12 & -8\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -10 & 0 & -8 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2\end{array}\right].$$

接著將 3-rd row 乘以 $-1/2$，然後將所得的 augmented matrix 的 3-rd row 分別乘上 3、-1 加至 2-nd 和 1-st row，即

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -3 & 0 & -12 & 1 & -12 & -8\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2\end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 2\end{array}\right].$$

最後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 -1。此時所得 augmented matrix 左半部為 reduced echelon form（即 I_4），故其右半部為 A^{-1}，即

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}. \quad \sharp$$

由前面討論我們知當 $A \in M_{n\times n}$ 為 invertible，則存在 elementary matrices $E_1,\ldots,E_k$ 使得 $(E_k\cdots E_1)A = I_n$。亦即 $A^{-1} = E_k\cdots E_1$。由 Proposition 2.6.5 (3)，我們知 $E_1,\ldots,E_k$ 皆為 invertible，且由 $(A^{-1})^{-1} = A$，得 $A = E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}$。事實上這些 elementary matrix E_i 的 inverse 就是將 E_i 還原成 I_n 的 elementary row operation 所對應的 elementary matrix。也就是說 E_i^{-1} 亦為 elementary matrix。因此我們有以下的定理：

Proposition 2.6.7. A 為 *invertible matrix* 若且唯若 A 為一些 *elementary matrices* 的乘積。

Example 2.6.8. 考慮矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

在求 A 的 inverse 的過程中，首先我們將 1-st row 和 2-nd row 交換。令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_1。因用相同的 elementary row operation 可將 E_1 還原成 I_3，故 $E_1 = E_1^{-1}$。即

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], E_1 = E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

接著將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 -1 加至 3-rd row。令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_2。因將 2-nd row 乘上 1 加至 3-rd row 的 elementary row operation 可將 E_2 還原成 I_3，故所得的 augmented matrix 及 E_2, E_2^{-1} 分別為

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

然後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 1/2。令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_3。因將 2-nd row 乘上 2 的 elementary row operation 可將 E_3 還原成 I_3，故所得的 augmented matrix 及 E_3, E_3^{-1} 分別為

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

最後將 augmented matrix 的 2-nd row 乘上 1 加至 1-st row。令此 elementary row operation 所對應的 elementary matrix 為 E_4。因將 2-nd row 乘上 -1 加至 3-rd row 的 elementary row operation 可將 E_4 還原成 I_3，故所得的 augmented matrix 及 E_4, E_4^{-1} 分別為

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我們檢查可得

$$A^{-1} = E_4E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad \sharp$$

最後讓我們回到解聯立方程組的問題。怎樣的 $A \in M_{m\times n}$ 會使得對任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$，聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆有解且解唯一呢？由 Theorem 2.5.2 和 Theorem 2.5.5 知此時 $\operatorname{rank}(A) = m$ 且 $\operatorname{rank}(A) = n$，即 $m = n$。也就是說 A 必須是 $n\times n$ 且 $\operatorname{rank}(A) = n$。因此由 Theorem 2.6.2 知 A 為 $n\times n$ invertible matrix。事實上我們有以下的等價關係。由於它們直接套用 Theorem 2.5.2 和 Theorem 2.5.5 就可推得，我們就不再證明了。

Theorem 2.6.9. 假設 $A \in M_{n\times n}$，令 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ 為 A 的 *column vectors*。則下列是等價的：

(1) A 為 *invertible matrix*。

(2) $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathbb{R}^n$。

(3) 對於任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$，聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆有解。

(4) 聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 沒有 *nontrivial solution*。

(5) 對於任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$，聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 皆有解且解唯一。

設 $A \in M_{n\times n}$ 為 invertible matrix，則對任意 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$，我們可以利用 A 的反矩陣 A^{-1} 得到聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的唯一解。事實上若令 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$，此時 $A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = \mathbf{b}$。又由 Theorem 2.6.9 知此時 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解唯一。故 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ 為聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 唯一的一組解。

Example 2.6.10. 考慮聯立方程組

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & & +x_3 & -x_4 & = & b_1 \\ & -x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & b_2 \\ x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = & b_3 \\ -3x_1 & & & -x_4 & = & b_4 \end{array}$$

其中 b_1, b_2, b_3, b_4 為任意實數。由於此時聯立方程組為 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，其中 A 為 Example 2.6.6 中的 4×4 matrix 且 $\mathbf{b} = [b_1\ b_2\ b_3\ b_4]^{\mathrm{t}}$。因 A 為 invertible，故由 Theorem 2.6.9 知：對任意實數 b_1, b_2, b_3, b_4，聯立方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 必有解且其解唯一。事實上此唯一解為

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 - b_3 - b_4 \\ -3b_1 - b_2 - b_4 \\ 5b_1 + 4b_3 + 3b_4 \\ 3b_1 + 3b_3 + 2b_4 \end{bmatrix}. \quad \sharp$$

Exercise 2.16. 令 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 為聯立方程組 $\begin{cases} x & & & + & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{cases}$

(1) 求 $\mathrm{rank}(A)$ 並利用 rank 說明此聯立方程組若有解其解唯一（請勿直接解此方程組）。

(2) 請利用 elementary row operations 找到兩個相異矩陣 E_1,E_2 使得 E_1A,E_2A 皆為 A 的 reduced echelon form。

(3) 請利用 (b) 所得的 E_1,E_2 找出兩個相異矩陣 D_1,D_2 使得 $D_1A=D_2A=I_3$.

(4) 請利用 (c) 所得的 D_1,D_2 說明方程組 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 若有解其解應為何？是 $D_1\mathbf{b}$ 或是 $D_2\mathbf{b}$？此結果是否與 (a) 的唯一性相違背？

(5) 將 (d) 所得的可能解代回聯立方程組說明此聯立方程組是否有解。

Exercise 2.17. 假設 A 為 $m\times n$ matrix 且 B 為 $n\times m$ matrix 滿足 $AB=I_m$. 前面的習題已知當 $m\neq n$ 時會存在無窮多個矩陣 M 使得 $AM=I_m$ 但不存在矩陣 N 使得 $NA=I_n$。又存在非零矩陣 C 使得 AC 為零矩陣但不存在非零矩陣 D 使得 DA 為零矩陣。請分別依 $m\neq n$; $m=n$ 兩種情況回答以下問題並說明原因。

(1) 是否存在矩陣使得 $BM=I_n$？

(2) 是否存在無窮多個矩陣使得 $NB=I_m$？

(3) 是否存在非零矩陣 C 使得 BC 為零矩陣？

(4) 是否存在非零矩陣 D 使得 DB 為零矩陣？

Exercise 2.18. 假設 A 為 n 階 square matrix 且 $A^2=O$，其中 O 為 n 階零方陣。證明 A 為 non-invertible 但 I_n-A 為 invertible (Hint 利用 $I_n-A^2=(I_n-A)(I_n+A)$)。請推廣到一般 $A^k=O$ 的情況。

Exercise 2.19. 假設 AB 為 invertible, 其中 A 為 $m\times n$ matrix, B 為 $n\times m$ matrix.

(1) 試證明 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)=m$。

(2) 證明當 $m\neq n$ 時 BA 不是 invertible。

下一頁的兩大題論及利用 constructive 和 nonconstructive 的方法論證反矩陣的存在性。挑戰性蠻高的，希望大家能好好討論。

Exercise 2.20. 課堂上我們利用 constructive 的方法證明了若 A,B 為 invertible，則 AB 亦為 invertible。也就是說我們直接建構出 AB 的反矩陣 $B^{-1}A^{-1}$。請依照這樣的想法處理以下問題。

(1) 假設 A,B 為方陣且 AB 為 invertible。請用 constructive 的方式找到 A, B 的反矩陣（也因此證明了 A,B 皆為 invertible）。注意：所找的反矩陣，必需用已知的矩陣表達，也就是僅能用 $A,B,AB,(AB)^{-1}$ 表達（不能用 A^{-1},B^{-1}）。另外要注意，論述中一定要用到 A,B 是方陣的假設（因為若不是方陣，結論是錯的）。

(2) 假設 A 為 $m\times n$ matrix, B 為 $n\times m$ matrix 滿足 $AB-I_m$ 為 invertible，我們想用 constructive 的方法證明 $BA-I_n$ 也是 invertible。為了方便起見我們用 C 表示 $AB-I_m$ 的反矩陣 $(AB-I_m)^{-1}$，也就是說，我們要用已知的矩陣例如 A,B,C,I_n 來表示 $BA-I_n$ 的反矩陣。

  (a) 利用矩陣乘法結合律以及分配律，找到一個矩陣 D 滿足

$$B(AB-I_m)=(BA-D)B.$$

  (b) 利用 C 為 $AB-I_m$ 的反矩陣以及上一題找到的 D 證明 $BA=(BA-I_n)BCA$，因此得到 $I_n=(BA-I_n)BCA-BA+I_n$。

  (c) 利用分配律，具體寫下 $BA-I_n$ 的反矩陣。說明此論述是否需要 A,B 為方陣（即 $m=n$）的要求。

Exercise 2.21. 用 constructive 的方式證明存在性，有時是很困難的（例如上一題的 (b)）。我們也可考慮用 nonconstructive 的方式（即純粹用理論）處理存在性。請依照這樣的想法處理以下問題。

(1) 假設 A 為 n 階方陣。證明 A 為 invertible 若且唯若當 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$，則 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$。

(2) 假設 A 為 n 階方陣。證明 A 為 invertible 若且唯若對任意 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 皆存在 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $A\mathbf{w}=\mathbf{v}$。

(3) 已知 A,B 為 n 階 invertible matrices。假設 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $(AB)\mathbf{v}=\mathbf{0}$，利用已知“若 $\mathbf{u},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $A\mathbf{u}=\mathbf{0}$, $B\mathbf{w}=\mathbf{0}$，則 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, $\mathbf{w}=\mathbf{0}$”證明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$（因此證明了 AB 為 invertible）。

(4) 已知 AB 為 n 階 invertible matrix。假設 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $B\mathbf{v}=\mathbf{0}$，利用已知“若 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $(AB)\mathbf{u}=\mathbf{0}$, 則 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$”證明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$（因此證明了 B 為 invertible）。

(5) 已知 AB 為 n 階 invertible matrices。任取 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$，利用已知“任取 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 皆存在 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $(AB)\mathbf{u}=\mathbf{v}$”證明存在 $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $A\mathbf{w}=\mathbf{v}$（因此證明了 A 為 invertible）。

(6) 假設 A 為 $m\times n$ matrix, B 為 $n\times m$ matrix。已知 $AB-I_m$ 為 invertible。假設 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 滿足 $(BA-I_n)\mathbf{v}=\mathbf{0}$，利用已知“若 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m$ 滿足 $(AB-I_m)\mathbf{u}=\mathbf{0}$, 則 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$”證明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$（因此證明了 $BA-I_n$ 為 invertible）。