

1.5.2. Quotient Space Topology. 在集合 X 中給定一個 equivalence relation \sim 後，我們可以利用此 equivalence relation 將 X 的元素分類：就是將在這 relation 之下是相關的元素視為同類。若我們將同類的元素視為同一個元素，這樣收集這些新的元素所成的集合，告訴我們有關利用此 equivalence relation 分類後，各類別的訊息。這個集合我們就用 X/\sim 表示。 X/\sim 和 X 是截然不同的集合，不過它們之間有這密切的關係。當 X 是 topological space 時，我們將學習如何定義 X/\sim 的 topology，即 quotient space topology。

我們簡單的回顧一下 equivalence relation。集合 X 上的 relation，若符合以下三個性質，則稱此 relation 為 *equivalence relation*

Reflexive: 對所有 $x \in X$ ，皆有 $x \sim x$ 。

Symmetric: 若 $x, y \in X$ 滿足 $x \sim y$ ，則 $y \sim x$ 。

Transitive: 若 $x, y, z \in X$ 滿足 $x \sim y$ 且 $y \sim z$ ，則 $x \sim z$ 。

有了一個 equivalence relation \sim 之後，我們便可以將 X 的元素分類。分類的方式為：若 $x \sim y$ ，則將 x, y 視為同類。對任意 $x \in X$ ，我們將所有與 x 同類的元素收集起來所成的集合用 $[x]$ 來表示，即 $[x] = \{y \in X \mid y \sim x\}$ 。這個集合稱為 x 的 *equivalence class*。依 equivalence relation 的性質，我們知道 equivalence class 有以下的性質：

- (1) $x \in [x], \forall x \in X$.
- (2) $[x] \cap [y] = \begin{cases} [x](= [y]), & \text{if } x \sim y; \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$

依此性質，這些 equivalence classes 將集合 X 分割成一個個互不相交的子集合。這些子集合的聯集就是 X ，且互不相交，這樣的分割方式稱為 X 的一個 *partition*。反過來，如果在集合 X 上有一個 partition 的分割，我們便可以令在分割的同一個子集合的元素為同類，這樣定出的 relation 也會是一個 equivalence relation。換言之給了一個集合 X 上的 partition 等同於定義了 X 上的一個 equivalence relation。

我們可以將 equivalence class $[x]$ 內的元素都視為相同，而得到一個新的元素，用 \bar{x} 來表示。也就是說 $\bar{x} = \bar{y}$ 等同於 $x \sim y$ 也等同於 $[x] = [y]$ ；而 $\bar{x} \neq \bar{y}$ 等同於 $x \not\sim y$ 也等同於 $[x] \neq [y]$ 。我們將這些分類後同類視為相等的新的元素收集起來所得的集合 $\{\bar{x} \mid x \in X\}$ 用 X/\sim 表示。注意，有的參考書籍將 X/\sim 的元素仍用 equivalence class $[x]$ 表示。而這裡我們刻意區分 \bar{x} 和 $[x]$ 的不同， \bar{x} 表示的是 X/\sim 中的元素，而 $[x]$ 表示的是 X 的子集合。

Example 1.5.5. 考慮 X 為 \mathbb{R} 中的閉區間 $[0, 1]$ ，定義其中的 equivalence relation 為

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

也就是說在此 equivalence relation 之下，當 $0 < x < 1$ 時，equivalence class $[x] = \{x\}$ 僅有一個元素，而 $[0] = [1] = \{0, 1\}$ 有兩個元素。也就是說當 $0 < x < 1$ 時 $\bar{x} \in X/\sim$ 可視為原來在 X 上的點，不過 $\bar{0} = \bar{1} \in X/\sim$ 就好像把 X 上 $0, 1$ 這兩點“黏”成一點。所以我們可以將 X/\sim “看成”是一個圓 (circle)。

考慮 X 為 \mathbb{R}^2 上的正方形及其內部 $[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. 定義 X 上的 equivalence relation 為

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = x', y - y' \in \mathbb{Z}.$$

當 $0 \leq x \leq 1$ 時, 若 $0 < y < 1$, 我們有 (x, y) 的 equivalence class $[(x, y)] = \{(x, y)\}$, 僅有一個元素; 而 $(x, 0)$ 的 equivalence class $[(x, 0)] = \{(x, 0), (x, 1)\}$, 有兩個元素. 所以 X/\sim 就好像將 X 上將兩線段 $\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $\{(x, 1) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 上相對的兩點 $(x, 0), (x, 1)$ “黏”成一點. 所以 X/\sim 就像把正方形上下兩對邊黏起來, 所以我們可以將 X/\sim “看成”是一個圓柱 (cylinder).

Question 1.35. 考慮 X 為 \mathbb{R}^2 上的正方形及其內部 $[0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. 定義 X 上的 equivalence relation 為

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ and } y = y') \text{ or } (x + x' = 1 \text{ and } |y - y'| = 1).$$

當 $0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1$, 試寫下 equivalence class $[(x, y)]$. 又 equivalence class $[(x, 0)]$ 為何? 你看得出 X/\sim 是所謂的 *Möbius band* 嗎?

從 Example 1.5.5 及 Question 1.35, 我們看出 X 和 X/\sim 是完全不同的集合, 千萬不要誤以為 X/\sim 會是 X 的 subset. 既然 X/\sim 是一個和 X 有關的新的集合, 當 X 是 topological space 時, 我們自然想在 X/\sim 中定出一個與 X 相關的 topology.

當 X 是 topological space 且 \mathcal{T} 為其 topology, 給定 X 上的一個 equivalence relation \sim , 會有一個很自然的函數從 X 送到 X/\sim . 即 $q: X \rightarrow X/\sim$ 定義為 $q(x) = \bar{x}, \forall x \in X$. 這個函數一般稱為 *quotient map* 或是 *nature map*. 我們希望定義 X/\sim 上的拓撲使得 q 是 continuous. 不過要記得, X/\sim 的拓撲越弱, 表示其 open set 越少, 因此會越容易讓 q 是 continuous (例如 X/\sim 選最弱的 indiscrete topology, 就一定會讓 q 是 continuous). 所以這裡我們要找的是 X/\sim 上使得 q 是 continuous 的拓撲中最強的 topology. 既然是要找最強的, 我們當然是收集那些 X/\sim 上的 subset S 使得 $q^{-1}(S)$ 會是 X 的 open set, 因此我們會考慮 $\tilde{\mathcal{T}} = \{S \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(S) \in \mathcal{T}\}$. 當然了, 若 $\tilde{\mathcal{T}}$ 是 X/\sim 的 topology, 這個 topology 就是使得 q 是 continuous 最強的 topology. 這是因為 $\tilde{\mathcal{T}}$ 以外的 $S' \subseteq X/\sim$, 不能使得 $q^{-1}(S')$ 是 X 的 open set, 所以如果多加了這些 S' 進來, q 就不再是 continuous 了. 因此我們僅要證明 $\tilde{\mathcal{T}}$ 確為 X/\sim 上的 topology.

為了方便起見, 我們用 \tilde{X} 表示 X/\sim . 要證明 $\tilde{\mathcal{T}}$ 確為 \tilde{X} 上的 topology, 首先檢查 \tilde{X} 和 \emptyset . 因為 $q^{-1}(\tilde{X}) = X \in \mathcal{T}$ 且 $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$, 故知 $\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{T}}$ 和 $\emptyset \in \tilde{\mathcal{T}}$. 即 topology 的性質 (1) 成立. 至於性質 (2), 我們考慮 index set I , 且對於任意 $i \in I$, 皆有 $S_i \in \tilde{\mathcal{T}}$, 即 $q^{-1}(S_i) \in \mathcal{T}$. 此時利用 \mathcal{T} 為 X 的 topology 得

$$q^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} S_i\right) = \bigcup_{i \in I} q^{-1}(S_i) \in \mathcal{T},$$

即 $\bigcup_{i \in I} S_i \in \tilde{\mathcal{T}}$. 最後, 若 $S_1, S_2 \in \tilde{\mathcal{T}}$, 表示 $q^{-1}(S_1), q^{-1}(S_2) \in \mathcal{T}$. 所以再次利用 \mathcal{T} 為 X 的 topology 得

$$q^{-1}(S_1 \cap S_2) = q^{-1}(S_1) \cap q^{-1}(S_2) \in \mathcal{T},$$

得證 $S_1 \cap S_2 \in \tilde{\mathcal{T}}$, 即性質 (3) 成立. 我們有以下的定義.

Definition 1.5.6. 假設 X 是 topological space 且 \mathcal{T} 為其 topology, 給定 X 上的一個 equivalence relation \sim . 考慮 X/\sim 上使得 quotient map $q: X \rightarrow X/\sim$ 為 continuous 最強的 topology $\tilde{\mathcal{T}} = \{S \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(S) \in \mathcal{T}\}$. 此 topology 稱為 *quotient space topology*, 而 X/\sim 利用 quotient space topology 所形成的 topological space, 便稱為 X 在 quotient \sim 之下的 *quotient space*.

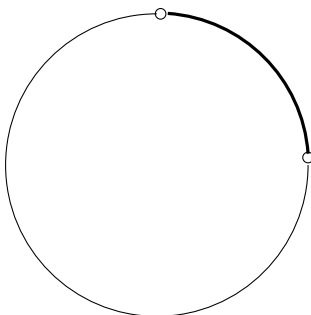
Question 1.36. 設 X, Y 為非空集合. 給定函數 $f: X \rightarrow Y$.

- (1) 假設 X 是 topological space 且 \mathcal{T} 為其 topology. 試問 Y 上使得 $f: X \rightarrow Y$ 為 continuous 最強的 topology 為何?
- (2) 假設 Y 是 topological space 且 \mathcal{T}' 為其 topology. 試問 X 上使得 $f: X \rightarrow Y$ 為 continuous 最弱的 topology 為何?

Example 1.5.7. 考慮 X 為 \mathbb{R} 中的閉區間 $[0, 1]$, 定義其中的 equivalence relation 為

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

將 X 視為 \mathbb{R} 的 standard topology 的 subspace. 我們試著描繪 quotient space X/\sim 的 open set. 當 $S \subseteq X/\sim$ 且 $\bar{0} \notin S$, 此時 $q^{-1}(S) = \{x \in X \mid \bar{x} \in S\} \subseteq X \setminus \{0, 1\}$ 就是 $(0, 1)$ 這個開區間的子集合. 此時由 Lemma 1.4.2 知 $q^{-1}(S)$ 是 open 若且唯若 $q^{-1}(S)$ 是開區間 $(0, 1)$ 中一些開區間的聯集. 也就是說, 在這種情況, S 是由 $I_{r,s} = \{\bar{x} \in X/\sim \mid r < x < s\}$, 其中 $0 < r < s < 1$ 這樣的集合聯集而成. 至於另一種情況, 也就是 $S \subseteq X/\sim$ 且 $\bar{0} \in S$. 此時 $\{0, 1\} \subseteq q^{-1}(S) = \{x \in X \mid \bar{x} \in S\}$. 因此若 $q^{-1}(S)$ 在 X 是 open, 表示 $q^{-1}(S)$ 必包含 0 和 1 的 open neighborhood. 依 subspace topology 的定義, 這表示 $q^{-1}(S)$ 必包含 $[0, r)$ 和 $(s, 1]$, 其中 $0 < r, s < 1$ 這樣的半開半閉的區間. 因此在這種情況, S 是由 $C_{r,s} = \{\bar{x} \in X/\sim \mid 0 \leq x < r \text{ or } s < x \leq 1\}$ 這樣的集合與 $I_{r,s}$ 這樣的集合 ($0 < r < s < 1$) 聯集而成. 換言之, X/\sim 這個 quotient space topology 的 basis 可以由 $I_{r,s}, C_{r,s}$ 其中 $0 < r < s < 1$ 這樣的集合所組成. 如果我們將 X/\sim 看成是一個 circle, 這些 basis 的元素, 就是在此圓上任意的開區間 (不必在意 $\bar{0} = \bar{1}$ 在哪裡), 如下圖所示.



Question 1.37. 試描繪 Example 1.5.5 中的 quotient space “cylinder” 和 Question 1.35 中的 quotient space “Möbius band”, 它們的 basis 中的元素為何.

當 X 是 topological space 且 \sim 為 X 上的 equivalence relation, 考慮 quotient space X/\sim . 如果有一個 topological space Y 及一函數 $h: (X/\sim) \rightarrow Y$ 是 continuous, 我們很自然可得函數 $f: X \rightarrow Y$, 其定義為 $f(x) = h(\bar{x})$, $\forall x \in X$ (亦即 $f = h \circ q$). 函數 f 有兩個特性. 首先, 由於 q 以及 h 皆為 continuous, 由 Proposition 1.3.4 知 $f: X \rightarrow Y$ 亦為 continuous. 另外, 如果 $x \sim x'$, 此時由於 $\bar{x} = \bar{x}'$ 故依 f 的定義, 得 $f(x) = h(\bar{x}) = h(\bar{x}') = f(x')$. 下一個有關 quotient space 重要的性質是說, 反過來也是對的.

Proposition 1.5.8. 假設 X 是 topological spaces 且 \sim 為 X 上的 equivalence relation, 考慮 quotient space X/\sim . 若 Y 為 topological space 且函數 $f: X \rightarrow Y$ 是 continuous 滿足 $f(x) = f(x')$, $\forall x \sim x'$, 則存在函數 $h: (X/\sim) \rightarrow Y$ 為 continuous 且滿足 $f = h \circ q$.

Proof. 首先我們必須找到函數 $h: (X/\sim) \rightarrow Y$ 滿足 $f = h \circ q$, 再說明 h 是 continuous 即可. 由於要求 $f = h \circ q$, 對於任意 $\bar{x} \in X/\sim$, 我們自然希望 $h(\bar{x}) = h(q(x)) = f(x)$. 不過這樣定義的 h 可能會有問題, 我們必須說明它是 well-defined. 也就是說, 任意的 X/\sim 中的元素, 雖然都可以用 \bar{x} 其中 $x \in X$ 這樣的方式表示, 不過這樣的表法並不唯一, 也就是有可能存在 $x' \in X$ 且 $x' \neq x$ 但在 X/\sim 中 $\bar{x}' = \bar{x}$. 此時若 $f(x) \neq f(x')$ 便會造成 h 將同樣的元素 $\bar{x} = \bar{x}'$ 映射到不同的元素 $h(\bar{x}) = f(x)$ 和 $h(\bar{x}') = f(x')$, 這種一對多, 不符合函數定義的情況. 然而在 f 的性質中, 告訴我們如果 $\bar{x} = \bar{x}'$, 即 $x \sim x'$, 此時 $f(x) = f(x')$. 也就是說, 我們擔心一對多的情況不會發生, 因此這樣定義出的 h 確為函數.

接下來我們證明 $h: (X/\sim) \rightarrow Y$ 為 continuous. 對任意 Y 的 open set U , 我們要說明 $h^{-1}(U)$ 在 X/\sim 中是 open. 依 quotient space topology 的定義, 要檢查 $h^{-1}(U)$ 是否在 X/\sim 中 open, 就等同於檢查 $q^{-1}(h^{-1}(U))$ 是否在 X 中 open. 然而 $q^{-1}(h^{-1}(U)) = (h \circ q)^{-1}(U) = f^{-1}(U)$, 故由 f 是 continuous 的假設, 得知 $q^{-1}(h^{-1}(U))$ 是 X 的 open set, 因此知 $h^{-1}(U)$ 是 X/\sim 的 open set. 得證 $h: (X/\sim) \rightarrow Y$ 是 continuous. \square

Proposition 1.5.8 可以用下面的 commutative diagram 來表示.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow q & \searrow f & \\ X/\sim & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

從前面的討論我們知道當 X, Y 為 topological spaces, \sim 為 X 上的 equivalence relation 以及 X/\sim 為其 quotient space. 考慮 $H = \{h \mid h: (X/\sim) \rightarrow Y, h \text{ is continuous}\}$ 以及

$$F = \{f \mid f: X \rightarrow Y, f \text{ is continuous and } f(x) = f(x'), \forall x \sim x'\}$$

則 $h \mapsto h \circ q$ 給了一個從 H 到 F 上一個對應關係. 很容易看出這個對應關係是一對一的, 因為若 $h, h' \in H$ 且 $h \neq h'$, 則表示存在 $\bar{x} \in X/\sim$ 使得 $h(\bar{x}) \neq h'(\bar{x})$ in Y . 也就是說 $h \circ q(x) \neq h' \circ q(x)$. 而 Proposition 1.5.8 告訴我們這個對應也是映成的, 因此我們有以下的結果.

Corollary 1.5.9. 假設 X, Y 為 topological space, \sim 為 X 上的 equivalence relation 以及 X/\sim 為其 quotient space. 令 $H = \{h \mid h: (X/\sim) \rightarrow Y, h \text{ is continuous}\}$ 以及

$$F = \{f \mid f: X \rightarrow Y, f \text{ is continuous and } f(x) = f(x'), \forall x \sim x'\}$$

則 $h \mapsto h \circ q$ 給了一個從 H 到 F 上一個一對一且映成的對應關係.

Question 1.38. 假設 Z, X 為 topological space, \sim 為 X 上的 equivalence relation 以及 X/\sim 為其 quotient space. 假如函數 $g: Z \rightarrow X$ 為 continuous, 則 $q \circ g: Z \rightarrow X/\sim$ 為 continuous; 但是反過來對嗎? 也就是說若函數 $h: Z \rightarrow X/\sim$ 是 continuous, 是否一定存在 $g: Z \rightarrow X$ 是 continuous 滿足 $h = q \circ g$? (Hint: 考慮 Example 1.5.7 的 X 以及 \sim , 並考慮 $Z = X/\sim$ 且 h 為 identity 的情形.)

Excecise 1.18. 以下是有關 quotient space 的觀念釐清.

- (1) 在 Example 1.5.7 中 $S = [0, 1/2)$ 是 $X = [0, 1]$ 的一個 open set, 試說明 $q(S)$ 是否為 X/\sim 的 open set?
- (2) 當 X 是 topological space 且 \sim 為 X 上的 equivalence relation, 考慮 quotient space X/\sim . 試說明 The quotient map $q: X \rightarrow X/\sim$ 未必為 open map.
- (3) 假設 U 是 topological space X 的一個 open set, 試說明未必存在 V 為 quotient space X/\sim 的 open set V 滿足 $q^{-1}(V) = U$.
- (4) 試利用 Example 1.5.7 說明如果 \mathcal{B} 是 topological space X 的一組 basis, 考慮 $\tilde{\mathcal{B}} = \{V \subseteq X/\sim \mid q^{-1}(V) \in \mathcal{B}\}$. 則 $\tilde{\mathcal{B}}$ 未必是 X/\sim 的一組 basis.

Excecise 1.19. 假設 X, Y 為 topological space, \sim 為 X 上的 equivalence relation 以及 X/\sim 為其 quotient space. 試證明若 $f: X \rightarrow Y$ 為 open map 滿足 $f(x) = f(x'), \forall x \sim x'$, 則存在函數 $h: (X/\sim) \rightarrow Y$ 為 open map 使得 $f = h \circ q$.