

CENTRALIZER, NORMALIZER, STABILIZER AND KERNEL

一個 group 除非是 abelian (可交換)，一般來說結構可以是很複雜的。我們先把重點放在判斷 group 中元素可以交換的程度如何？可以交換的程度越高表示相對來講結構比較簡單；而可以交換的程度越低就覺得會比較複雜。用什麼方法來定義可以交換的程度呢？要了解它，我們可以從 subgroup 和 group action 的角度來看。由於想先說明這些名詞，所以先從 subgroup 談起。

1. 從 SUBGROUP 的看法

1.1. **Center 和 Centralizer.** 對於元素很多的 group，先了解其中元素比較少的 subgroup 是很自然的想法。這裡面我們當然會把可以和所有元素交換的收集起來，稱為此 group 的 *center*。對於一個 group 它的 center 我們會用 $Z(G)$ 來表示。也就是說

$$Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}.$$

注意，這裡收集的 g 是和所有 G 中的元素可交換；而不是和特定的 x 可交換。很容易知道 $Z(G)$ 越大表示可交換的元素越多，所以會拿它來判斷一個 group 可以交換的程度。另外 $Z(G)$ 是 G 的一個 subgroup 又因為 $Z(G)$ 的元素可以和所有元素交換，所以 $Z(G)$ 是一個 abelian group。

有時候 G 的交換性太差了， $Z(G)$ 根本沒什麼東西，我們會退而求其次收集可以和 G 的 subgroup H 中所有的元素交換的元素 (H 元素比 G 少，可以和所有 H 的元素交換的應該會比較多)。稱為 H 在 G 的 *centralizer* 並用 $C_G(H)$ 來表示。也就是說

$$C_G(H) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in H\}.$$

注意，很多人會被這個名詞誤導，以為 centralizer 是讓 H 在 $C_G(H)$ 的 “center” 中。其實這是不對的。剛剛已經說過：一個 group 的 center 會是該 group 的 abelian subgroup。若 H 本身的一些元素不能交換，那 H 本身既不是 abelian 也不會是 $C_G(H)$ 的 subgroup (因為 H 中有元素無法和 H 的所有元素交換)。不過，如果 H 是 abelian，則 H 確實會落入 $C_G(H)$ 的 center 中。也就是說： H 是 abelian 等同於

$$H \leq Z(C_G(H)) \leq C_G(H).$$

另外也別誤以為 $C_G(H)$ 是 H 的 center。依定義 H 的 center 必須在 H 中，但 $C_G(H)$ 中有可能包含 H 以外的元素，所以 $C_G(H)$ 未必是 H 的 subgroup。另一方面 $C_G(H)$ 中的元素都可以和 H 的元素交換，但未必本身元素之間可以交換 (未必是 abelian)。所以 $C_G(H)$ 也不一定是 H 的 center。然而若將 $C_G(H)$ 限制在 H 中，即考慮 $H \cap C_G(H)$ ，就會是 H 的 center。因為：

$$H \cap C_G(H) = \{g \in H \mid gx = xg, \forall x \in H\} = Z(H).$$

這也是為何 center 不用下標，但 centralizer 需用到下標表示在哪裡的 centralizer。

從 $C_G(H)$ 依然是 G 的 subgroup (但未必是 abelian) 的證明中不難發現，並不需要 H 是 G 的 subgroup。也就是說：任取 G 中的非空子集 S ，考慮集合

$$C_G(S) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in S\}$$

依然會是 G 的 subgroup。我們仍稱之為 S 在 G 的 *centralizer*。有趣的是：如果 H 是 G 中包含 S 最小的 subgroup (有時會用 $H = \langle S \rangle$ 表示)，則 $C_G(S) = C_G(H)$ 。雖然 $C_G(S) = C_G(H)$ ，但一般我們喜歡用 $C_G(S)$ 來找 $C_G(H)$ 。因為經常 S 中的元素會遠少

於 $\langle S \rangle = H$ 中的元素，自然要檢查是否與 S 可交換會比檢查與 H 可交換省事多了。例如當 S 僅有一個元素 a ，則 G 中包含 a 最小的 subgroup $\langle a \rangle$ 是一個 cyclic group。當 $S = \{a\}$ 僅有單一元素，我們會用 $C_G(a)$ 來表示其 centralizer，亦即

$$C_G(a) = \{g \in G \mid ga = ag\}$$

且直接稱 $C_G(a)$ 為 a 在 G 的 centralizer。既然 $C_G(a) = C_G(\langle a \rangle)$ ，要找到其中的元素，僅要檢查是否與 a 可以交換即可；當然比檢查整個 cyclic group $\langle a \rangle$ 方便多了。因為 cyclic group $\langle a \rangle$ 是 abelian，所以從前面討論知 $a \in \langle a \rangle \subseteq Z(C_G(a))$ ，亦即 $a \in Z(C_G(a))$ 。事實上， $C_G(a)$ 是 G 中最大的 subgroup 會讓 a 在其 center 中。這也是當初會稱 $C_G(a)$ 為 a 在 G 的 centralizer 的原因。它可用來衡量 a 與 G 中其他元素可交換的程度： $C_G(a)$ 越大表示越多東西可以與它交換。例如： $a \in Z(G)$ 等同於 $C_G(a) = G$ 。

1.2. Normal Subgroup 和 Normalizer. 在 group G 的 subgroup 中有一種重要的 subgroup，稱為 normal subgroup，對了解 G 特別重要。

對於 G 中的元素 x 以及 subgroup H ，我們定義集合 $xH = \{xh \mid h \in H\}$ 以及 $Hx = \{hx \mid h \in H\}$ 。當 G 的一個 subgroup H 滿足

$$xH = Hx, \forall x \in G$$

我們稱 H 為 G 的 *normal subgroup*，且用 $H \trianglelefteq G$ 來表示。例如 G 的 center $Z(G)$ 就是 G 的一個 normal subgroup，因為對任意的 $x \in G, g \in Z(G)$ 皆有 $xg = gx$ ，所以 $xZ(G) = Z(G)x$ 皆成立。不過一般來說 H 是 G 的 normal subgroup 並不表示對於所有的 $x \in G$ 以及 $h \in H$ 皆有 $xh = hx$ ；而是能找到一個 $h' \in H$ 使得 $xh = h'x$ 即可。簡單來說 normal subgroup 把 H 中的元素與所有 G 中元素的交換性放寬了一些。

如果 H 不是 normal subgroup，那我們退而求其次只收集那些 G 中元素 g 滿足 $gH = Hg$ ，並稱之為 H 在 G 中的 *normalizer* 且用 $N_G(H)$ 表示，亦即

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$

注意：當 $H \trianglelefteq G$ ，即 H 是 G 的 normal subgroup，依定義就等同於 $G = N_G(H)$ 。所以 $N_G(H)$ 可以拿來評量 H 在 G 會是 normal 的程度。事實上， $N_G(H)$ 是 G 的 subgroup 但注意未必是 normal subgroup；不過依定義 H 會是 $N_G(H)$ 的 normal subgroup。而且 $N_G(H)$ 是 G 中最大的 subgroup 會讓 H 在其中為 normal。這也是稱之為 normalizer 的原因。

前面提過，對於 subgroup H ，其 centralizer $C_G(H)$ 的元素 g 要求比較嚴格，即必須和所有 H 的元素都可交換；而 normalizer $N_G(H)$ 的要求比較寬鬆，只要滿足 $gH = Hg$ 即可。所以我們自然有

$$C_G(H) \leq N_G(H).$$

2. 從 GROUP ACTION 的看法

給定一個集合 S ，若對 group G 中的每一個元素都能對應到一個 S 到 S 的函數，且這些函數之間的合成關係與 G 的元素運算相一致，我們就稱這是一個 G 對 S 的 *group action*。有了 group action 的好處是：我們可應用熟悉的函數合成來了解 G ，也可利用 group action 將 S 分類，來了解 S 。

底下我們會介紹利用 conjugate 所得的 group action。現在我們先考慮一般的情況。假定有一個 G 對 S 的 group action。對於 $g \in G$ ，我們用函數的方式表示 group action，亦即將 g 看成函數 $g: S \rightarrow S$ ，而且對於 $s \in S$ ，我們將 g 對 s 的 action 寫成 $g(s)$ 。因為函數合成與 group 運算一致，如果 $g_1, g_2 \in G$ 且 $s \in S$ 我們將 $g_2(g_1(s))$ 寫成 $g_2g_1(s)$ 。

有了 group action，我們便可將 S 分類：固定 $s \in S$ ，若對於 $s' \in S$ ，可以找到 $g \in G$ ，使得 $g(s) = s'$ ，我們便稱 s 與 s' 同類。換言之，對任意 $g \in G$ ， $g(s)$ 都與 s 同類。不過，並不是每一個 $g \in G$ 都能幫我們找到 S 中另一個與 s 同類的元素。因為有可能 $g(s) = s$ 。所以我們把這樣的 g 找出來，即考慮

$$G_s = \{g \in G \mid g(s) = s\}$$

稱為在此 action 之下 s 的 *stabilizer*。很容易檢查 G_s 是 G 的 subgroup：(1) 如果 $g_1, g_2 \in G_s$ ，表示 $g_1(s) = g_2(s) = s$ ，所以由 $g_2 g_1(s) = g_2(g_1(s)) = g_2(s) = s$ ，得知 $g_2 g_1 \in G_s$ 。(2) 如果 $g \in G_s$ ，表示 $g(s) = s$ ，所以由 $g^{-1}(s) = g^{-1}(g(s)) = g^{-1}g(s) = 1(s) = s$ ，得知 $g^{-1} \in G_s$ 。

G 中那些對所有 S 中的元素都無作用的我們也特別收集起來，即考慮

$$(1) \quad K = \{g \in G \mid g(s) = s, \forall s \in S\} = \bigcap_{s \in S} G_s$$

稱為這個 group action 的 *kernel*。由於 subgroups 的交集也會是 subgroup，所以 K 也會是 G 的 subgroup。

2.1. Conjugate 作用在元素。 既然 G 對於 S 的 group action 可以幫助我們了解 S ，所以我們可以考慮 $S = G$ 的情況來了解 G 。最常見的 G 對 G 的 group action 就是利用 conjugate 的概念。也就是對任意 $g \in G$ ，考慮函數 $g(x) = gxg^{-1}$ ， $\forall x \in G$ 。注意，這樣確實定義了 $g: G \rightarrow G$ 的函數，而且當 $g_1, g_2 \in G$ ，對於任意 $x \in G$ ，若令 $g_1(x) = g_1 x g_1^{-1} = y$ ，則

$$g_2(g_1(x)) = g_2(y) = g_2 y g_2^{-1} = g_2 g_1 x (g_2 g_1)^{-1} = g_2 g_1(x).$$

也就是說，取 conjugate 確實讓我們定出一個 G 對 $S = G$ 的 group action。

在此 conjugate 的 group action 之下，考慮 $a \in S = G$ 的 stabilizer 是什麼呢？依定義 $g(a) = a$ 表示 $gag^{-1} = a$ ，亦即 $ga = ag$ 。所以在此 group action 之下

$$G_a = \{g \in G \mid g(a) = a\} = \{g \in G \mid ga = ag\} = C_G(a),$$

也就是說在取 conjugate 的 group action 之下 $a \in G$ 的 stabilizer 就是 a 在 G 的 centralizer。什麼是 conjugate action 的 kernel 呢？依定義

$$K = \{g \in G \mid g(x) = x, \forall x \in G\} = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\} = Z(G),$$

也就是說在取 conjugate 的 group action 之下 kernel 就是 G 的 center。而且利用式子 (1) stabilizer 和 kernel 交集的關係，我們也有

$$Z(G) = \bigcap_{a \in G} C_G(a).$$

2.2. Conjugate 作用在 Subgroup。 既然 subgroup 可以幫助我們了解 group，我們也可考慮 group action 作用在 S ，其中 S 為 G 的 subgroup 所成的集合（即 S 的元素為 G 的 subgroup）。這種情況，最常見的 group action 依然是利用 conjugate。此時對於 $g \in G$ 以及 $H \in S$ （即 H 為 G 的 subgroup），我們定義

$$g(H) = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}.$$

很容易證明 gHg^{-1} 也是 G 的 subgroup（即 $g(H) \in S$ ），也就是 g 是一個 S 到 S 的函數。而且如前所示，conjugate 確實定義出 G 對 S 的 group action。

在此 conjugate 的 group action 之下，考慮 $H \in S$ 的 stabilizer 是什麼呢？依定義 $g(H) = H$ 表示 $gHg^{-1} = H$ ，亦即 $gH = Hg$ 。所以在此 group action 之下

$$G_H = \{g \in G \mid gH = Hg\} = N_G(H),$$

也就是說在取 conjugate 的 group action 之下 subgroup H 的 stabilizer 就是 H 在 G 的 normalizer。

要注意在 2.1 所考慮 conjugate 對元素的作用時，我們不能將任意 $g \in G$ 作用在 $S = H$ 上。因為對於 $h \in H$ ， $g(h) = ghg^{-1}$ 未必會屬於 H （除非 H 是 G 的 normal subgroup）。也就是說 g 未必會是 H 到 H 的函數，所以取 conjugate 一般來說不會是 G 對 H 的 group action。不過若考慮 $g \in N_G(H)$ ，此時因為 $g(h) = ghg^{-1} \in gHg^{-1} = H$ ，所以取 conjugate 可以是 $N_G(H)$ 對 H 的 group action。

由 2.1 所考慮 conjugate 對元素的作用，我們知 $N_G(H)$ 對 H 的 conjugate action，對於 $h \in H$ 的 stabilizer 為 $C_{N_G(H)}(h)$ 。什麼是這個 conjugate action 的 kernel 呢？依定義

$$K = \{g \in N_G(H) \mid g(x) = x, \forall x \in H\} = \{g \in N_G(H) \mid gx = xg, \forall x \in H\} = C_G(H) \cap N_G(H).$$

由於前面已知 $C_G(H) \leq N_G(H)$ ，所以 $C_G(H) \cap N_G(H) = C_G(H)$ 。也就是說，這個 group action 之下 kernel 就是 H 在 G 的 centralizer。而且利用式子 (1) stabilizer 和 kernel 交集的關係，我們也有

$$C_G(H) = \bigcap_{h \in H} C_{N_G(H)}(h).$$