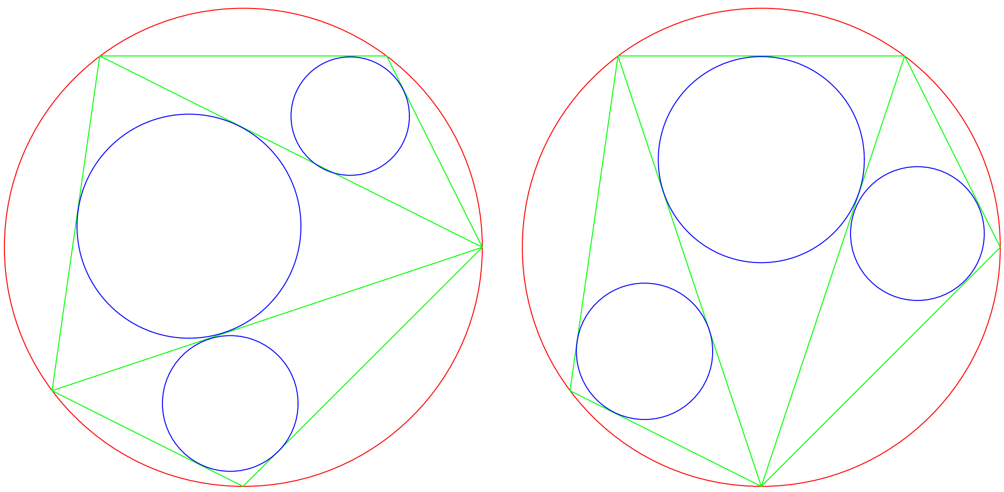
算術講義

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



左圖三小圓半徑和＝右圖三小圓半徑和

目 錄

1 畢氏數與費馬方程式

1.1 畢氏數

若正整數 a,b,c 互質且 a,b,c 剛好構成一個直角三角形的三邊邊長，即 $c^2=a^2+b^2$，則稱 (a,b,c) 是一組『畢氏數』。也就是說，邊長是正整數且互質之直角三角形的三邊邊長恰是一組畢氏數。有關畢氏數最有名的結果莫過於克羅內克在 1901 年證明的底下這個定理：

定理 **1.1** (克羅內克定理) 方程式 $x^2+y^2=z^2$ 的互質正整數解（即 $(x,y,z)=1$ 的正整數解 x,y,z）或者說任何的畢氏數 (x,y,z) 均可表為

$$\begin{cases} x=m^2-n^2, \\ y=2mn, \\ z=m^2+n^2, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=2mn, \\ y=m^2-n^2, \\ z=m^2+n^2, \end{cases}$$

其中 m,n 為互質的正整數且一為奇數，一為偶數。

【証明】首先令 x,y,z 是方程式 $x^2+y^2=z^2$ 的一組互質正整數解，由此方程式可以推得 x,y,z 其實是兩兩互質的。若 x,y 都是偶數，則 z 必為偶數，這與假設不符。如果 x,y 都是奇數，則 z 為偶數，此與 $z^2=x^2+y^2\equiv 2 \pmod 4$ 矛盾。所以 x,y 必須一個為奇數，一個為偶數。為了方便，不妨設 y 為偶數，x,z 為奇數（注意：x,y,z 兩兩互質）。

首先證明：$(z-x,z+x)=2$：
令 $(z-x,z+x)=d$ 則

$$d \mid z-x, d\mid z+x \Rightarrow d\mid 2x, d\mid 2z \Rightarrow d\mid 2 \Rightarrow d=1 \ \text{ 或 } \ 2.$$

因為 $z-x,z+x$ 都是偶數，所以 $d=2$。現在由

$$\begin{aligned} y^2&=(z+x)(z-x), \quad \text{其中} \ (z+x,z-x)=2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} z+x=2m^2, \\ z-x=2n^2, \\ y=2mn, \end{cases} \quad \text{其中} \ m,n \ \text{互質} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x=m^2-n^2, \\ y=2mn, \\ z=m^2+n^2, \end{cases} \quad \text{其中} \ m,n \ \text{互質且一奇，一偶}. \end{aligned}$$

⊠

例題 **1.1** 證明方程式

$$x^4-4y^4=z^2 \tag{1.1}$$

無正整數解 x,y,z。

【証明】設 x, y, z 是此方程式的一組正整數解。若有一個質數 p 同時整除 x 與 y，則由 (1.1) 得到：p^2 整除 z。此時可推得 $(x/p, y/p, z/p^2)$ 亦為 (1.1) 的一組正整數解。因此，我們不妨假設 x 與 y 互質，容易推得此時的 x, y, z 是兩兩互質的；甚至由

$$(2y^2)^2 + z^2 = (x^2)^2 \tag{1.2}$$

可進一步得到：$2y^2, z, x^2$ 是兩兩互質的。由 (1.2) 及定理 1.1 可得

$$\begin{cases} 2y^2 = 2mn, \\ z = m^2 - n^2, \qquad m, n \quad \text{互質且一奇一偶}. \\ x^2 = m^2 + n^2, \end{cases} \tag{1.3}$$

因為 m, n 互質且 $y^2 = mn$，所以必有 $m = a^2, n = b^2$。代入 (1.3) 得到：正整數 a, b, x 滿足

$$a^4 + b^4 = x^2. \tag{1.4}$$

在下一節的定理中，我們將證明方程式 $x^4 + y^4 = z^2$ 無正整數解 x, y, z。因此 (1.4) 是不可能的，所以本例題無正整數解。 ⊠

1.2 費馬方程式與費馬無窮遞降法

定理 **1.2** 證明方程式 $x^4 + y^4 = z^2$ 無正整數解 x, y, z。

【証明】假設 x, y, z 為 $x^4+y^4 = z^2$ 的正整數解中 z 值最小的一組解，則有 $(x, y, z) = 1$（自行檢驗）；同前定理的證明，不妨假設 y 為偶數， x, z 為奇數，則利用前定理得到

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} x^2 = m^2 - n^2, \\ y^2 = 2mn, \qquad\qquad \text{其中正整數 } m, n \text{ 互質且一奇，一偶} \\ z = m^2 + n^2, \end{cases} \\
&\Rightarrow n \text{ 偶數，} m \text{ 奇數（由 } x^2 + n^2 = m^2 \text{ 得到）} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x = c^2 - d^2, \\ n = 2cd, \qquad\qquad \text{其中正整數 } c, d \text{ 互質且一奇，一偶} \\ m = c^2 + d^2, \end{cases} \\
&\Rightarrow y^2 = 4cd(c^2 + d^2) \\
&\Rightarrow c = e^2, d = f^2, c^2 + d^2 = g^2 \text{（因為 } c, d, c^2 + d^2 \text{ 兩兩互質）} \\
&\Rightarrow e^4 + f^4 = g^2 \text{ 其中 } e, f, g \text{ 為正整數。}
\end{aligned}$$

因為 $g \le g^2 = c^2 + d^2 = m < z$，所以我們找到另一組正整數解 (e, f, g)，其中 $g < z$，得到矛盾。 ⊠

這樣的證明方法稱為費馬無窮遞降法，是費馬首創的方法。

定理 **1.3** 費馬方程式 $x^4 + y^4 = z^4$ 無正整數解 x, y, z。

【解】因為 $x^4 + y^4 = (z^2)^2$, 定理 1.2 知道 $x^4 + y^4 = z^4$ 無正整數解 x, y, z。 ⊠

費馬方程式是泛指像“$x^n+y^n=z^n$”這樣的方程式。當 $n=3,4$ 時，費馬是第一位證明此方程式無正整數解的數學家；當 $n=5$ 時，勒讓德於 1823 年證明此方程式無正整數解；當 $n=7$ 時，狄利克雷於 1832 年證明此方程式無正整數解。事實上，當 $n\geq 3$ 時，費馬方程式皆無正整數解，這就是有名的費馬最後定理。這個定理在 1994 年時，被英國數學家威爾斯證明成立。

1.3 另一則方程式

定理 **1.4** 考慮方程式 $x^4-9y^4=z^2$。

(1) 若 x,y,z 為此方程式的一組正整數解，則證明：$2\mid y$。

(2) 證明：方程式 $x^4-9y^4=z^2$ 無正整數解 x,y,z。

【解】

(1) 為了方便起見，不妨假設 x,y,z 是方程式 $(x^2)^2=(3y^2)^2+z^2$ 的一組互質正整數解且 y 為奇數則

$$\begin{aligned}&(x^2)^2=(3y^2)^2+z^2\\&\quad\Rightarrow\begin{cases}x^2=m^2+n^2,\\3y^2=m^2-n^2, & \text{其中正整數 } m,n \text{ 互質}\\z=2mn,\end{cases}\\&\quad\Rightarrow\begin{cases}3\mid m \text{ 或 } 3\mid n \ (\text{由 } x^2=m^2+n^2 \text{ 得到}),\\3y^2=m^2-n^2,\end{cases}\\&\quad\Rightarrow 3\mid m \text{ 且 } 3\mid n,\ \text{這與 } m,n \text{ 互質矛盾。}\end{aligned}$$

因此 y 必須是偶數。

(2) 設方程式 $x^4-9y^4=z^2$ 的正整數解中，x 值最小的一組是 x,y,z；因為 x 值最小，所以 x,y,z 必是互質的正整數解。現在考慮 $(x^2)^2=(3y^2)^2+z^2$。因為 $(x,y,z)=1$，所以容易推得 $(x^2,3y^2,z)=1,3$。當 $(x^2,3y^2,z)=3$ 時，我們有 $3|x,3|z$，但是 $3\nmid y$（這是因為 x,y,z 互質）。將式子 $(x^2/3)^2=(y^2)^2+(z/3)^2$ 模 3 得到 $0\equiv 1+(z/3)^2 \pmod 3$，這與 $(\text{整數})^2\equiv 0,1 \pmod 3$ 矛盾。若 $(x^2,3y^2,z)=1$，則由 (1) 及定理 1.1 可令

$$\begin{aligned}&\begin{cases}x^2=m^2+n^2,\\3y^2=2mn, & \text{其中正整數 } m,n \text{ 互質}\\z=m^2-n^2,\end{cases}\\&\qquad\Rightarrow\begin{cases}m=c^2-d^2,\\n=2cd,\end{cases} \quad \text{其中正整數 } c,d \text{ 互質且一奇，一偶}\\&\qquad\Rightarrow 3\left(\frac{y}{2}\right)^2=cd(c^2-d^2),\ \text{其中正整數 } c,d,c^2-d^2 \text{ 兩兩互質。}\end{aligned}$$

因為 c,d,c^2-d^2 為兩兩互質的正整數且 c,d 為一奇數、一偶數及

$$3\left(\frac{y}{2}\right)^2=cd(c^2-d^2).$$

現在分三種情形如下：

(a) 若 $3 \mid c$，則

$$\begin{aligned} c^2 - d^2 = e^2 \quad &\Rightarrow c^2 = d^2 + e^2 \\ &\Rightarrow 3 \mid d \ \text{ 或 } \ 3 \mid e \\ &\Rightarrow 3 \mid d \ \text{（因為 } 3 \mid c\text{）。} \end{aligned}$$

此與 c, d 互質矛盾。

(b) 若 $3 \mid d$，則

$$\begin{cases} c = e^2, \\ d = 3f^2, \\ c^2 - d^2 = g^2, \end{cases} \quad \text{其中 } e, f, g \text{ 為正整數且 } e < c < n < x$$
$$\Rightarrow e^4 - 9f^4 = g^2.$$

這與 x 是最小的假設矛盾。

(c) 若 $3 \mid c^2 - d^2$，但 3 不整除 c 與 d，則

$$\begin{cases} c = e^2, \\ d = f^2, \end{cases} \quad \text{其中 } e, f \text{ 一奇，一偶且不是 3 的倍數}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (e^2 - f^2)(e^2 + f^2) = c^2 - d^2 = 3g^2, \\ 1 \equiv e^2 \equiv f^2 \pmod 3. \end{cases}$$

由 c, d 一奇、一偶且互質推得 $(e^2 - f^2, e^2 + f^2) = 1$；再利用 $3 \mid e^2 - f^2$ 得到

$$e^2 + f^2 = h^2 \Rightarrow e, f \ \text{ 至少有一個為 3 的倍數.}$$

這與 e, f 不是 3 的倍數矛盾。

綜合 (a)、(b)、(c) 得知：方程式 $x^4 - 9y^4 = z^2$ 無正整數解。 ⊠

1.4 費馬無窮遞降法的另一個應用

定理 **1.5** 利用費馬無窮遞降法證明：$\sqrt{2}$ 不是有理數。

【証明】設 $\sqrt{2}$ 是有理數，且將它表為

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$$

的形式，其中 $p, q (p < q < 2p)$ 為正整數，且 q/p 是上述表示法中 p 值最小的一組。由

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \frac{q}{p} &\Rightarrow 2p^2 = q^2 \\ &\Rightarrow 2(q-p)^2 = (q-2p)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{|q-2p|}{q-p} \end{aligned}$$

及分母 $(q - p) < p$ 知道：這與 q/p 是上述表示法中 p 值最小的一組矛盾。因此，$\sqrt{2}$ 不是有理數。 ⊠

習題 **1.1** 證明：邊長是正整數之直角三角形的內切圓半徑亦為正整數。

習題 **1.2** 試求 $x^4+1=z^2$ 的整數解 x,z。

習題 **1.3** 證明方程式 $x^4-y^4=z^2$ 無正整數解 x,y,z。

習題 **1.4** 證明方程式 $x^4-y^4=2z^2$ 無正整數解 x,y,z。

習題 **1.5** 證明方程式 $x^4+4y^4=z^2$ 無正整數解 x,y,z。

習題 **1.6** 證明：三邊皆為正整數的直角三角形的面積不可能是一個完全平方數。

習題 **1.7** 設 p 為質數，利用費馬無窮遞降法證明：$\sqrt{p}$ 不是有理數。

動手玩數學

希望之島西邊的居民都專說謊話，東邊的居民則有專說謊話的，也有專說實話的。一天一位數學家到這小島來觀光，一下飛機就有甲、乙、丙三位島上的居民爭著充當這位數學家的導遊。數學家分別叫甲去問乙、乙去問丙、丙去問甲住在島的哪一邊。結果回報是這樣的：

甲告訴數學家“乙說他住在島的東邊”

乙告訴數學家“丙說他住在島的西邊”

丙告訴數學家“甲說他住在島的東邊”

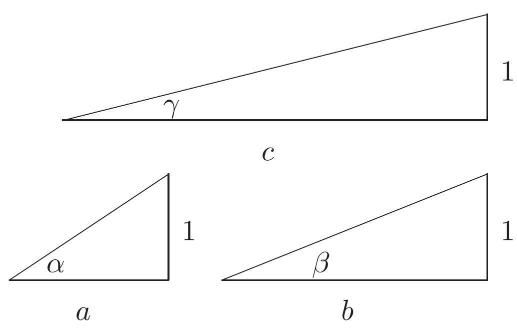
數學家猶豫一下之後，又叫丙去問乙住在島的哪一邊，回報是這樣的：

丙告訴數學家“乙說他住在島的西邊”

你能知道甲、乙、丙分別住在島的哪一邊，是老實人或者是說謊者嗎？

挑戰題

設正整數 a,b,c 是底下三個直角三角形的底邊之邊長。



如果

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4},$$

試求正整數 a, b, c 的值。

挑戰題

試求滿足

$$|3^m-2^n|=1$$

的正整數 m 與 n。

杰斯馬維奇猜想

杰斯馬維奇在 1956 年時，提出如下的猜想：如果正整數 a, b, c 滿足 $a^2+b^2=c^2$，則方程式

$$a^x+b^y=c^z$$

的正整數解僅有 $x=y=z=2$ 一組而已。中國數學家柯召在這方面有不錯的貢獻（大多發表在四川大學學報自然科學版）。例如在

$$\begin{cases} a=2n+1, \\ b=2n(n+1), \\ c=2n(n+1)+1, \end{cases} \qquad \text{其中 } n \equiv 1,4,5,9,10 \pmod{12}$$

時，杰斯馬維奇猜想是對的。

我國的數學奧林匹亞選訓營曾經考過如下的題目：若 $3^n+4^n=5^n$，則 $n=2$。有興趣的讀者，可以嘗試看看。