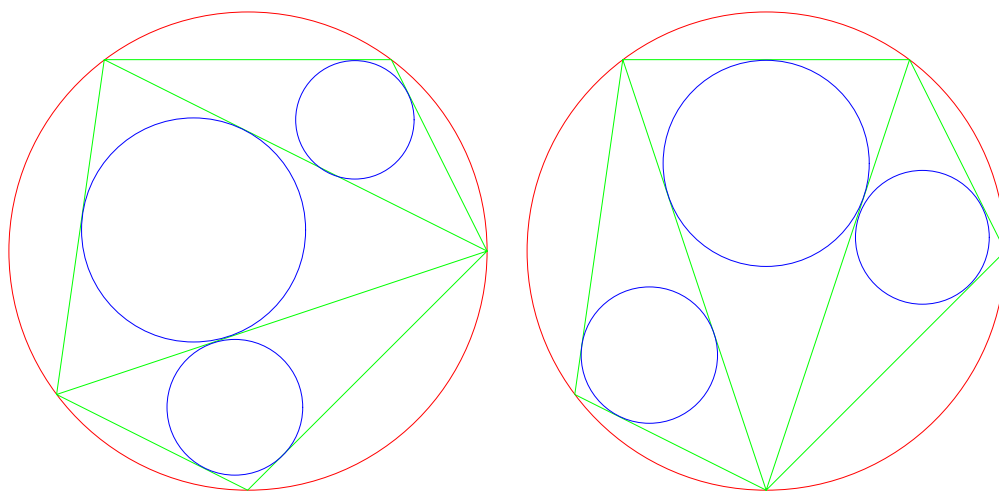


算術講義

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和 = 右圖三小圓半徑和

目 錄

1 圓錐曲線上的格子點問題	1
---------------	---

1

1 圓錐曲線上的格子點問題

本文的主要目的是要探討圓錐曲線上的格子點問題。底下是整數論常用有關因數，倍數的一個引理：若 d 為正整數， a, b 為整數且 $d | a, d | b$ ，則

$$d | am + bn,$$

其中 m, n 為整數。

例題 1.1 設分數 $\frac{x+9}{9y}$ 與分數 $\frac{x}{y}$ 相等，其中 x, y 為阿拉伯數字。試求 x, y 的值？

【解】由題意知

$$\begin{aligned}\frac{10x+9}{90+y} &= \frac{x}{y} \Rightarrow 9xy - 90x + 9y = 0 \\ &\Rightarrow xy - 10x + y = 0 \\ &\Rightarrow (x+1)(y-10) = -10.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{x+1}{y-10} \mid \begin{array}{ccc} 2 & 5 & 10 \\ -5 & -2 & -1 \end{array} \Rightarrow (x, y) = (1, 5), (4, 8), \text{ 或 } (9, 9).$$

☒

例題 1.2 設 m, n 為正整數且

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

亦為正整數。試確定 m, n 的值。

【解】由 $(mn-1) | (n^3+1), (mn-1) | (mn-1)$ 得

$$\begin{cases} (mn-1) | (n^3+1)m - (mn-1)n^2 = n^2 + m, \\ (mn-1) | (n^3+1)m^3 - (mn-1)(m^2n^2 + mn + 1) = m^3 + 1. \end{cases}$$

故

$$\frac{n^3+1}{mn-1}, \frac{m^3+1}{mn-1}, \frac{n^2+m}{mn-1}$$

皆為正整數。由於 m, n 對稱的關係，我們假設 $m \geq n \geq 1$ 。又 m, n 不可能同時是 1，所以有 $m \leq 2(mn-1)$ 及 $n^2 \leq mn \leq 2(mn-1)$ 。故得

$$\frac{n^2+m}{mn-1} = 1, 2, 3, \text{ 或 } 4.$$

(1) 若

$$\frac{n^2+m}{mn-1} = 1,$$

則 $(n-1)(m-n-1) = 2$ ，即 $(m, n) = (5, 2), (5, 3)$ 。

(2) 若

$$\frac{n^2+m}{mn-1} = 2,$$

則 $(2n-1)(4m-2n-1) = 9$ ，即 $(m, n) = (2, 2), (3, 1)$ 。

(3) 若

$$\frac{n^2 + m}{mn - 1} = 3,$$

則 $(3n - 1)(9m - 3n - 1) = 28$ ，即 $(m, n) = (2, 1)$ 。

(4) 若

$$\frac{n^2 + m}{mn - 1} = 4,$$

則 (m, n) 無解。

由對稱的關係可得到另外四組解

$$(m, n) = (2, 5), (3, 5), (1, 3), (1, 2).$$

因此共有

$$(m, n) = (5, 2), (2, 5), (5, 3), (3, 5), (2, 2), (3, 1), (1, 3), (2, 1), (1, 2)$$

九組正整數解。

☒

習題 1.1 三角形 ABC 是邊長為 15 的正三角形， P 為 BC 邊上的點。若線段長 PA, PB, PC 均為正整數，試求線段 PA 的長度。

習題 1.2 若分數 $\frac{x6}{6y}$ 與分數 $\frac{x}{y}$ 相等，其中 x, y 為阿拉伯數字。試求 x, y 的值？

習題 1.3 若分數 $\frac{x99}{99y}$ 與分數 $\frac{x}{y}$ 相等，其中 x, y 為阿拉伯數字。試求 x, y 的值？

習題 1.4 試求

$$x^2 - y^2 = 611$$

的正整數解 x, y 。

習題 1.5 試求

$$(m^2 + n)(m + n^2) = (m + n)^3$$

的正整數解 m, n 。

動手玩數學

任意給定 7 個整數（可以相同），是否必有 4 個的和為 4 的倍數。

挑戰題

如果 p 是奇質數且滿足

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} \quad (\text{根據費馬小定理，此數為正整數})$$

是一個完全平方數。試求 p 的值。

阿廷-邱拉猜想

如果 p 是一個被 4 除之餘數為 1 的質數且正整數 x, y 是滿足

$$x^2 - py^2 = 4$$

且離原點最近的正整數解，則 p 不能整除 y 。這是有名的阿廷-邱拉猜想。