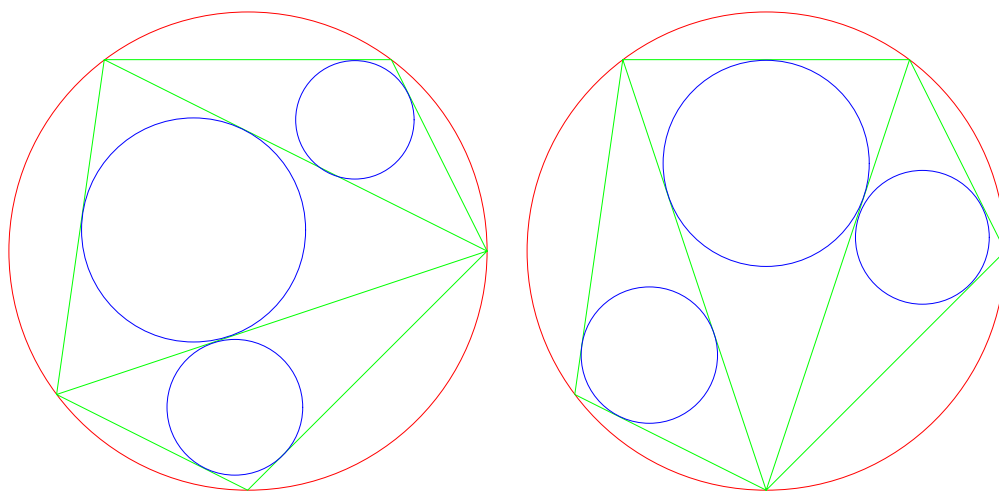


算術講義

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和 = 右圖三小圓半徑和

目 錄

1 代數整數與整係數質多項式

1

1 代數整數與整係數質多項式

一個複數 α 稱為代數整數是指：可以找到一個首項係數為 1，而且其它係數都是整數的多項式

$$\begin{cases} f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \\ \text{其中 } a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \text{ 為整數} \end{cases}$$

滿足 $f(\alpha) = 0$ 。使得上述條件成立的最低次多項式（首項係數限為 1） $f(x)$ 用符號 $M_\alpha(x)$ 表示，並稱此為 α 的最小多項式。例如： $\alpha = \sqrt{2}$ 時，因為 $\sqrt{2}^2 - 2 = 0$ ，所以

$$M_{\sqrt{2}}(x) = x^2 - 2.$$

定理 1.1 若 $M_\alpha(x)$ 是代數整數 α 的最小多項式則

- (1) $M_\alpha(x)$ 是整係數質多項式。
- (2) 若整係數多項式 $f(x)$ 滿足

$$f(\alpha) = 0$$

則 $M_\alpha(x)$ 整除 $f(x)$ 。

【證明】

- (1) 利用反證法，假設 $M_\alpha(x)$ 不是質多項式，則可令

$$M_\alpha(x) = g(x)h(x)$$

其中 $g(x), h(x)$ 的次數不為零。由

$$M_\alpha(\alpha) = g(\alpha)h(\alpha) = 0 \Rightarrow g(\alpha) = 0 \text{ 或 } h(\alpha) = 0.$$

這與 $M_\alpha(x)$ 是最小的整係數多項式矛盾。因此 $M_\alpha(x)$ 是整係數質多項式。

- (2) 設 $f(x)$ 被 $M_\alpha(x)$ 除之，餘式為 $r(x)$ ，商是 $q(x)$ ，則我們得到

$$f(x) = M_\alpha(x)q(x) + r(x),$$

其中 $\deg r(x) < \deg M_\alpha(x)$ 或者 $r(x)$ 是零多項式。由此得到

$$\begin{aligned} 0 = f(\alpha) = M_\alpha(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) &\Rightarrow r(\alpha) = 0 \\ &\Rightarrow r(x) = 0 \quad (\text{零多項式}) \\ &\Rightarrow M_\alpha(x) \mid f(x). \end{aligned}$$

□

例題 1.1 假設實數

$$\alpha = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}.$$

試證 α 是一個代數整數，並求最小多項式 $M_\alpha(x)$ 。

【證明】由立方差的公式

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

得到

$$\sqrt[3]{4^3} - \sqrt[3]{2^3} = (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) \left((\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2})^2 + 3\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \right).$$

因此 α 是方程式

$$x^3 + 6x - 2 = 0$$

的一個根。又根據一次因式檢驗法（或者第 ?? 節艾森斯坦判別法）知道 $x^3 + 6x - 2$ 是一個質多項式，所以最小多項式

$$M_\alpha(x) = x^3 + 6x - 2.$$

□

設

$$r = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}.$$

由隸莫弗定理知道

$$r^7 = 1 \Rightarrow (r - 1)(r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1) = 0.$$

因為 $r \neq 1$ ，所以

$$r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1 = 0.$$

設

$$\begin{cases} \alpha = r + r^6 = 2 \cos \frac{2\pi}{7}, \\ \beta = r^2 + r^5 = 2 \cos \frac{4\pi}{7}, \\ \gamma = r^3 + r^4 = 2 \cos \frac{6\pi}{7}, \\ p = r + r^2 + r^4, \\ q = r^3 + r^5 + r^6. \end{cases}$$

例題 1.2 試完成下列問題：

- (1) 試求以實數 α, β, γ 為三根的三次方程式。
- (2) 求 $M_{2 \cos \frac{2\pi}{7}}(x)$ 。
- (3) 試求以複數 p, q 為兩根的一元二次方程式。
- (4) [1963 IMO] 證明：

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}, \\ \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}. \end{cases}$$

【證明】(1) 因為

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r = -1, \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= 2(r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r) = -2, \\ \alpha\beta\gamma &= r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 2 = 1,\end{aligned}$$

所以三次方程式為 $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ 。

(2) 因為 $x^3 + x^2 - 2x - 1$ 是一個質多項式，所以

$$M_{2\cos\frac{2\pi}{7}}(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

(3) 因為

$$\begin{aligned}p + q &= r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r = -1, \\ pq &= r^6 + r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 3 = 2,\end{aligned}$$

所以二次方程式為 $x^2 + x + 2 = 0$ 。

(4) 由 $x^2 + x + 2 = 0$ 的公式解知道：

$$\{p, q\} = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2} \right\}.$$

因為

$$\begin{aligned}p &= r + r^2 + r^4 \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \right) i \\ &= - \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7} \right) i \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i,\end{aligned}$$

所以 (4) 成立。 □

習題 1.1 試

(1) 求 $M_{\sqrt{3}+\sqrt{5}}(x)$ 。

(2) 證：若 $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ 是方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

的一個根，其中 a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 是整數，則證明

$$11 \mid (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n).$$

習題 1.2 設 $\alpha = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ 。試證 α 是一個代數整數，並求最小多項式 $M_\alpha(x)$ 。

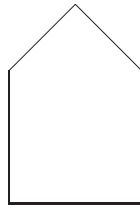
習題 1.3 試求三次方程式

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

的根。

動手玩數學

下圖是一個房子形的蛋糕，底部與兩邊的長度是 2 單位，而屋頂的斜長為 $\sqrt{2}$ 單位。蛋糕師父想將此蛋糕切兩刀之後變成三塊，而此三塊恰可拼成一個等腰直角三角形蛋糕。你能幫蛋糕師父解決他的煩惱嗎？



挑戰題

設

$$r = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$$

且令

$$\begin{cases} \alpha = r + r^2 + r^4 + r^8 + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16}, \\ \beta = r^3 + r^5 + r^6 + r^7 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{14}. \end{cases}$$

- (1) 試求以 α, β 為兩根的一元二次方程式。
- (2) 試求 α, β 的值。
- (3) 試求 α_1, α_2 的值，其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = r + r^4 + r^{13} + r^{16}, \\ \alpha_2 = r^2 + r^8 + r^9 + r^{15}. \end{cases}$$

- (4) 試求 β_1, β_2 的值，其中

$$\begin{cases} \beta_1 = r^3 + r^5 + r^{12} + r^{14}, \\ \beta_2 = r^6 + r^7 + r^{10} + r^{11}. \end{cases}$$

- (5) 試求 $x = r + r^{16} = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$ 的值。

高斯證明正十七邊形可以尺規作圖

$$2 \cos \frac{2\pi}{17}$$

$$\parallel$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} + \frac{\sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}}{8}$$

尺規作圖問題

與代數整數相關的問題有相當古老的尺規作圖問題。所謂尺規作圖問題是指去判別一個複數（常常是實數），在僅給定“沒有刻度的直尺、圓規及單位長度”的情形下：是否可在平面上作出此複數來。如果此數可作出來則稱此數為可尺規作圖的數。至於那些數是可尺規作圖的數，一直是很難的問題。直到十九世紀的初期，數學家才得到完整的瞭解。例如若代數整數 α 是個可尺規作圖的數則 α 的最小多項式的次數必需是 2 的某次方才行；因此像

$$\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}, \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ, \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$$

等此三數都是不可尺規作圖的數。由 $\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ 是一個不可尺規作圖的數得到角 60° 是不可被三等分的。這解決了古代作圖題的三大難題之一的三等分角問題。也就是說：給定任意的一個角，我們不見得能把它給三等分，只有在很特殊的角的情形才能夠辦到（例如：當 n 是 3 的倍數時，則 n° 角是可尺規作圖的；也就是說，9 的倍數的整數角是可以三等分的）。 ☒