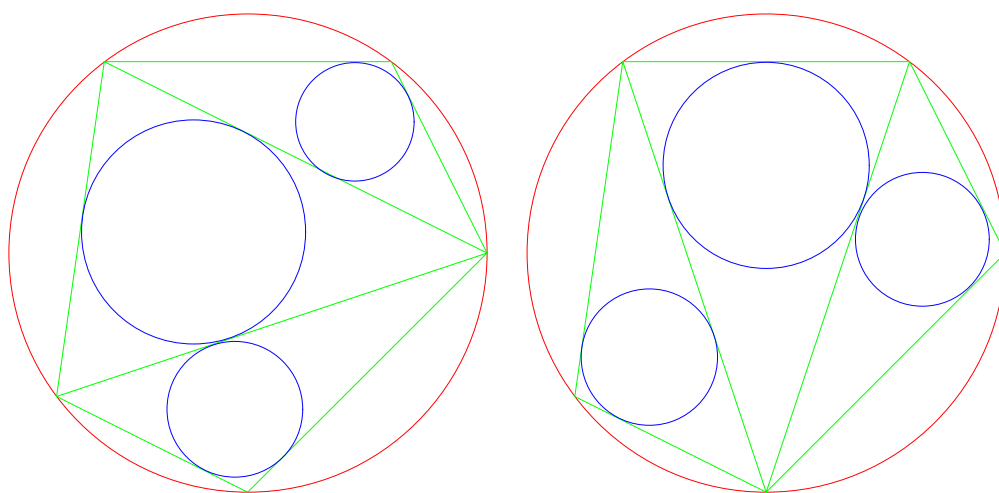


# 算術講義

許志農

國立台灣師範大學數學系

December 28, 2004



左圖三小圓半徑和 = 右圖三小圓半徑和

## 目 錄

1 再談佩爾方程式

1

## 1 再談佩爾方程式

定理 1.1 (佩爾方程式) 如果正整數  $s$  不是完全平方數則證明：可以找到正整數數對  $(x, y)$  使得

$$x^2 - sy^2 = 1.$$

【證明】由定理 ?? 知道：可以找到無窮多的正整數序對  $(x, y)$  使得

$$x^2 - sy^2 = p,$$

其中  $p$  為滿足  $|p| \leq 1 + 2\sqrt{s}$  的整數。因此可以找到兩組不相同的正整數序對  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  滿足

$$\begin{cases} x_1^2 - sy_1^2 = x_2^2 - sy_2^2 = p \\ x_1 \equiv x_2 \pmod{p}; y_1 \equiv y_2 \pmod{p} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \left( \frac{x_1x_2 - sy_1y_2}{p} \right)^2 - s \left( \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{p} \right)^2 = 1 \\ \frac{x_1x_2 - sy_1y_2}{p} \text{ 與 } \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{p} \text{ 為整數.} \end{cases}$$

如果  $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ ，則令

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = n.$$

推得

$$p = x_1^2 - sy_1^2 = n^2(x_2^2 - sy_2^2) = n^2p \Rightarrow n = 1.$$

此與  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  是兩組不相同的正整數數對矛盾。因此

$$\begin{cases} x = \left| \frac{x_1x_2 - sy_1y_2}{p} \right| \\ y = \left| \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{p} \right| \end{cases} \quad x, y \text{ 為正整數且滿足 } x^2 - sy^2 = 1.$$

所以存在正整數序對  $(x, y)$  使得

$$x^2 - sy^2 = 1.$$

□

現在假設  $(a, b)$  是離原點最近且滿足  $x^2 - sy^2 = 1$  的正整數解，我們想證明：所有方程式  $x^2 - sy^2 = 1$  上的正整數解  $(x, y)$  都有如下的形式

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n.$$

定理 1.2 若  $(x, y)$  是方程式  $x^2 - sy^2 = 1$  上的正整數解，則證明可以找到一個正整數  $n$  使得

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n.$$

【證明】假設  $(x, y)$  是不能表為

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n$$

的形式且離原點最近的正整數解。顯然我們有  $x > a > 1; y > b$ 。現在我們考慮整數數對  $(x_0, y_0)$  如下：

$$\begin{aligned}x_0 + y_0\sqrt{s} &= \frac{x + y\sqrt{s}}{a + b\sqrt{s}} \\&= (x + y\sqrt{s})(a - b\sqrt{s}) \\&= (ax - bys) + (ay - bx)\sqrt{s}.\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}x_0^2 - sy_0^2 &= (ax - bys)^2 - s(ay - bx)^2 \\&= (a^2 - sb^2)x^2 - s(a^2 - sb^2)y^2 \\&= x^2 - sy^2 = 1.\end{aligned}$$

再由

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{ax - bys}{a^2x^2 - b^2y^2s^2} \\&= \frac{ax - bys}{ax + bys} \\&= \frac{(a^2 - sb^2)x^2 + sb^2(x^2 - sy^2)}{ax + bys} \\&= \frac{x^2 + sb^2}{ax + bys} > 0 \\y_0 &= \frac{ay - bx}{a^2y^2 - b^2x^2} \\&= \frac{ay - bx}{ay + bx} \\&= \frac{-b^2(x^2 - sy^2) + (a^2 - sb^2)y^2}{ay + bx} \\&= \frac{y^2 - b^2}{ay + bx} > 0 \text{ (因為 } y > b\text{)}\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}x - x_0 &= -(a-1)x + bys \\ &= \frac{-(a-1)^2x^2 + b^2y^2s^2}{(a-1)x + bys} \\ &= \frac{-sb^2(x^2 - sy^2) + [sb^2 - (a^2 - 2a + 1)]x^2}{(a-1)x + bys} \\ &= \frac{-sb^2 + 2(a-1)x^2}{(a-1)x + bys} \\ &= \frac{2(a-1) + 2(a-1)sy^2 - sb^2}{(a-1)x + bys} > 0 \quad (\text{因為 } a > 1, y > b)\end{aligned}$$

推得

$$\begin{cases} 0 < x_0 < x \\ 0 < y_0 \\ x_0^2 - sy_0^2 = 1 \\ x_0 + y_0\sqrt{s} \text{ 不能表為 } (a + b\sqrt{s})^n \text{ 的形式。} \end{cases}$$

此與  $(x, y)$  是不能表為

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n$$

的形式，且離原點最近的正整數解矛盾；因此所有  $x^2 - sy^2 = 1$  上的正整數解都能表為

$$x + y\sqrt{s} = (a + b\sqrt{s})^n$$

的形式。

□

習題 1.1 若一個正整數可表為

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad (\text{其中 } n \text{ 為正整數})$$

的形式，則稱此正整數為三角形數。證明：既是三角形數，又是完全平方數的正整數有無窮多個。

習題 1.2 <sup>1</sup> 找一個正整數  $n$  使得： $n$  的所有正因數的平方和等於  $(n+3)^2$ 。

動手玩數學

若  $ABCDEF$  是一個平行六邊形，即

$$AB // DE, BC // EF, CD // FA.$$

證明：三角形  $ACE$  與三角形  $BDF$  的面積相等。

<sup>1</sup>考慮  $n = pq$ ，其中  $p$  與  $q$  是相異質數。

挑戰題

試求所有邊長是正整數且面積恰與周長一樣的三角形。

達文波特定理

英國數學家達文波特有一個與 abc 猜想類似的結果。這個結果與多項式相關，敘述如下：如果  $f(x)$  與  $g(x)$  為實係數多項式且滿足  $f(x)^3 - g(x)^2 \neq 0$ ，則我們有

$$\deg(f(x)^3 - g(x)^2) \geq \frac{1}{2} \deg f(x) + 1.$$

讀者是否能用初等的方法證明這個已知的結果呢？