基隆市九十二學年度教師聯合甄試試題

一、 若 $(x+1)^2$ 整除 $px^{10}+qx^9+1$，則 p,q 之值為何？（10 分）

二、 設實數 a_1,a_2,b_1,b_2 滿足 $a_1\geq b_1\geq b_2\geq a_2>0$ 及 $a_1a_2\geq b_1b_2$。試證明：不等式 $a_1+a_2\geq b_1+b_2$ 成立。（20 分）

三、 將分數

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$$

盡可能化簡成最簡單的形式。（10 分）

四、 今有圓形城堡一座，城堡的正東面和南面各有一城門，今有甲、乙二人，甲從南面的城門往南走 135 公尺然後站在那裡，乙才從東城門往東走，要走到 16 公尺才剛好看到甲。請求出城堡的半徑。（11 分）

五、 每一本現代的書都有國際標準書碼（或 ISBN 碼），國際標準書碼一共有十碼，前九碼是 9 個數字，稱為「訊息碼」；第十碼可能是數字或是 × 這個記號，稱為「檢查碼」。檢查碼是由訊息碼所唯一決定的，如訊息碼為 $a_1a_2a_3-a_4a_5a_6-a_7a_8a_9$ 的書的檢查碼是根據加權數

$$1\cdot a_1+2\cdot a_2+3\cdot a_3+\cdots+9\cdot a_9$$

除以 11 所得的餘數來訂定，當餘數是 10 時，規定檢查碼為 ×，餘數不為 10 時，就以此餘數為檢查碼。

(1) 《錢伯斯的二十世紀字典》這本書的訊息碼為 $055-010-206$。問：這本書的完整 ISBN 碼為何？

(2) 婷婷從電腦上查得《幾何原本十三卷》這本書的ISBN碼，並用噴墨印表機將它印下。由於不小心，手指摸到其中的第三碼，使得該數字模糊了，但是其它的數字還很清楚，書碼如下所示

$$\text{ISBN：}04\blacksquare-620-112-0$$

你能推得該書碼的第三碼應該是多少嗎？

(3) 有一本書的訊息碼這 9 個數字中有 2 個數字是不一樣的，現在將這 2 個數字對調，其餘保持不變（檢查碼也不變）。證明：所得的新碼不符合ISBN碼的規定。

（18 分）

六、 根據研究，用 x 單位的清水清洗蔬菜後，蔬菜上殘留農藥與清洗前的殘留農藥比為函數 $f(x)$，$f(x)$ 可表示為

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

試問：

(1) 用 1 單位的清水清洗蔬菜後，蔬菜上的農藥殘留量與未清洗前的農藥殘留量的比值是多少。

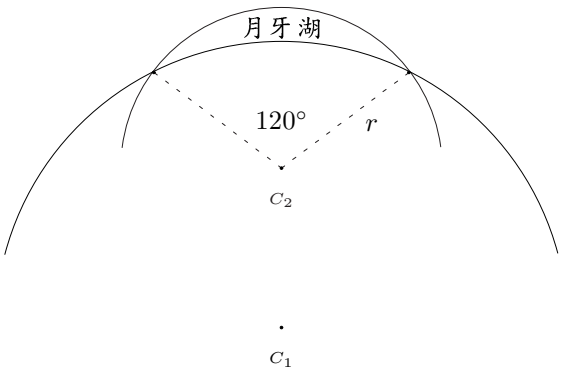
(2) 用 $2a(a>0)$ 單位的清水清洗蔬菜後，蔬菜上的農藥殘留量與未清洗前的農藥殘留量的比值是多少。

(3) 用 $a(a>0)$ 單位的清水清洗蔬菜後，再一次用 a 單位的清水清洗同樣的蔬菜。求在這兩次清洗之後，蔬菜上的農藥殘留量與未清洗前的農藥殘留量的比值是多少。

(4) 在 (2) 與 (3) 的兩種清洗蔬菜的方法中，哪一種清洗後，蔬菜上殘留的農藥較少？

（20 分）

七、 下圖是沙漠中出現的『月牙湖』，月牙湖的上沿是以 C_2 為圓心，r 為半徑的圓之一弧（該弧的圓心角為 $120°$）；月牙湖的下沿是以 C_1 為圓心的某圓之一弧。已知點 C_1 在以 C_2 為圓心，r 為半徑的圓週上，試求『月牙湖』的面積（以 r 表示）。



（11 分）