基隆市九十三學年度市立高中、國民中學新聘教師聯合甄選考試試題
高中專業（數學）科目試題

一、 設 $p, q$ 是介於 0 與 1 之間的實數。

(1) 證明

$$\frac{1}{p}+p, \frac{1}{q}+q, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q,$$

可以構成三角形三邊邊長。

(2) 求此三角形面積及內切圓半徑。

(3) 設三角形為 $ABC$ 且

$$AB=\frac{1}{q}+q, AC=\frac{1}{p}+p, BC=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-p-q$$

若 $A$ 在邊 $BC$ 上的垂足為 $H$，則求高 $AH$ 的長度。

(4) 求 $BH$ 與 $CH$ 的長度。

（20 分）

二、 獵人養了兩隻大小獵犬，每次狩獵時，都讓大小獵犬守候在相距一公里的兩個位置上。當獵人射下鳥類時，兩隻獵犬會同時以直線的距離追捕獵物。已知大獵犬的速度是小獵犬的兩倍，求小獵犬先追到獵物的範圍區域面積是多少平方公里？（10 分）

三、 設 $a$ 為整數，而實數 $b<0$。已知 $x^3+ax^2+bx=0$ 有一不為零的整數根，且 $x^3+ax^2+bx-2=0$ 有一整數根。

(1) 試求 $a$ 與 $b$ 之值。

(2) 試證 $x^3+ax^2+bx-1=0$ 有三實根，且都介於 $-2$ 與 2 之間。

（16 分）

四、 團體購買公園門票，票價如下：

| 購票人數 | $1-50$ | $51-100$ | 100 以上 |
|---|---|---|---|
| 每人票價（元） | 13 | 11 | 9 |

今有甲、乙兩個旅遊團，若分別購票，兩團總計應付門票費用 1314 元，若合在一起作為一個團體購票，總計支付門票費用 1008 元，問這兩個旅遊團各有多少人？（12 分）

五、 設 $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 為黃金比率。問：下列五個值中，哪幾個的值也是黃金比率：

$$\frac{1}{r+1};\quad \frac{1-r}{r};\quad \frac{1-2r}{r-1};\quad \frac{\sqrt{2}r+1}{r+\sqrt{2}+1};\quad \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+2\sqrt{2}+1}.$$

（12 分）

六、 哈雷在他的好朋友牛頓的協助之下，成功的計算出一顆彗星（就是有名的哈雷彗星）將於 1758 年光臨地球，而且這是十八世紀唯一的一次光臨，同時他們也算出下世紀也僅會光臨一次。已知哈雷彗星的週期 $P$ 剛好是整數年，而且第十八世紀是指西元 1701 年至西元 1800 年。

(1) 根據上述資料推論 $P \geq 72$。

(2) 中國的天文學家，在第十七世紀裡，一共觀測到哈雷彗星光臨地球兩次。試據此推論 $P \leq 78$。

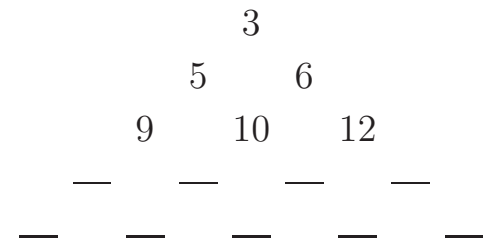
(3) 事實上，中國的天文學家早已注意哈雷彗星很久，翻開歷史記錄得知：此顆彗星在第十四世紀也是光臨地球兩次；但是在第十一及十二世紀時，哈雷彗星分別僅光臨地球一次而已。你能根據這些資料，列舉出哪些 (1) 及 (2) 所得到的 $P$ 值是不合的，並算出哈雷彗星的真正週期。

（18 分）

七、 如果 $s, t$ 是滿足 $s > t \geq 0$ 的整數，那麼形如 $2^s + 2^t$ 這樣的正整數稱為 2 的冪和數。現在將所有 2 的冪和數依小到大排列，把這個數列記為 $\langle a_n \rangle$，即

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^1 + 2^0 = 3, \\ a_2 &= 2^2 + 2^0 = 5, \\ a_3 &= 2^2 + 2^1 = 6, \\ a_4 &= 2^3 + 2^0 = 9, \\ a_5 &= 2^3 + 2^1 = 10, \\ a_6 &= 2^3 + 2^2 = 12, \\ &\vdots \end{aligned}$$

上述的條列方式不容易得出規律，於是改將數列 $\langle a_n \rangle$ 填入楊輝（或巴斯卡）三角裡（填法是由上而下，從左至右）。




(1) 求這表的第四列及第五列的數字依序是多少。

(2) 求 $a_{50} = ?$

（12 分）