1　憧憬未來三年勝過追憶過去十年

最近收到一封《致許教授的一封信》的 e-mail，將其中的一段文字摘錄如下：我是 86 級的學生，當年大二時修你開的代數課程，慚愧得很，在我渾渾噩噩的大學生涯中，那算是唯一留下痕跡的科目吧（因為…有用心過！）。畢業近十載，我向你致上最深的謝意！也在畢業近十載後，才漸漸懂得求學問的樂趣，懂得欣賞數學的美！偶然在你的網頁上，看到一個由小綠綠同學發現的不等式題目：

題目：　設 p, q, r 是三個滿足

$$0 < p, q, r < 1$$

的實數。證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

看過小綠綠同學及那位高中老師的立體模型解法，果真令人拍案叫絕，驚嘆一聲 Aha！自己也情不自禁的試了一下（精確的說，是試了很多下），以下是個人的解法…。

屈指算來，在國中教書的這位老師應該是我到師大服務第二年教到的學生。其實隔天他再傳一封 e-mail 給我，說他想到使用機率的概念來解此不等式。談到機率，一般會想到樹狀圖與文氏圖兩種方法，它們是將機率問題幾何化的方法。說來大家可能不相信，文氏圖的歷史還不到兩百年，為什麼人類這麼晚才將文氏圖用在數學解題上，我也搞不太清楚？不過什麼叫文氏圖，如何定義才完善，也是個麻煩事。美國數學家菱克沙恩給過文氏圖定義，稱其為「一個集合的符號表示法，用平面的某個部分來表示所考慮的對象，用某條封閉曲線內部的點來表示一個集合。」

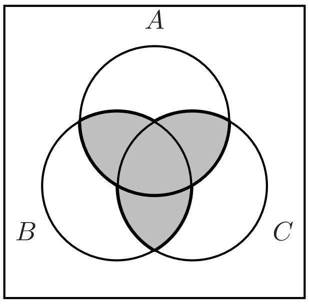
現在就讓我們來欣賞使用機率解決不等式問題的方法：

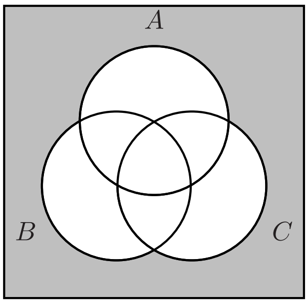
〈李老師的機率概念解不等式問題〉

設 A, B 與 C 是完全獨立的三個事件，而且發生 A, B 與 C 事件的機率分別為 p, q 與 r。下圖左圖中的灰色區域就是 A, B 與

C 中至少發生兩個事件以上之區域，利用發生 A 及 B 的機率 $P(A\cap B)=pq$，B 及 C 的機率 $P(B\cap C)=qr$， C 及 A 的機率 $P(C\cap A)=qr$，A,B 與 C 的機率 $P(A\cap B\cap C)=pqr$，得三事件 A,B 與 C 中至少發生兩個事件的機率為

$$pq+qr+rp-2pqr.$$





上圖右圖的灰色區域代表 A,B 與 C 三個事件均不發生的機率，因為它們是完全獨立的三事件，所以發生灰色區域的機率為 $(1-p)(1-q)(1-r)$。而且，由 $0<p,q,r<1$ 知

$$(1-p)(1-q)(1-r)>0.$$

因為 A,B 與 C 三個事件均不發生的機率為正，所以至少發生兩個事件以上的機率必小於 1，也就是說

$$pq+qr+rp-2pqr<1,$$

得證。 ⊠

當我到中學演講時，只要是講不等式，都會講這道小綠綠發現的不等式問題及她們的妙解。事實上，如果各位有注意大考中心的數學計畫資料，也可以發現，這道不等式問題可以設計成各式各樣的題型，至少中心揭櫫的各種計算證明題型，都可以用它來作範例。原本我以為這問題應該可以

功成身退了，沒想到我學生的一封 e-mail，讓它再一次的以新的面貌跟各位見面。最後讓我們欣賞李老師帶國中生彩繪 Escher 的圖形。