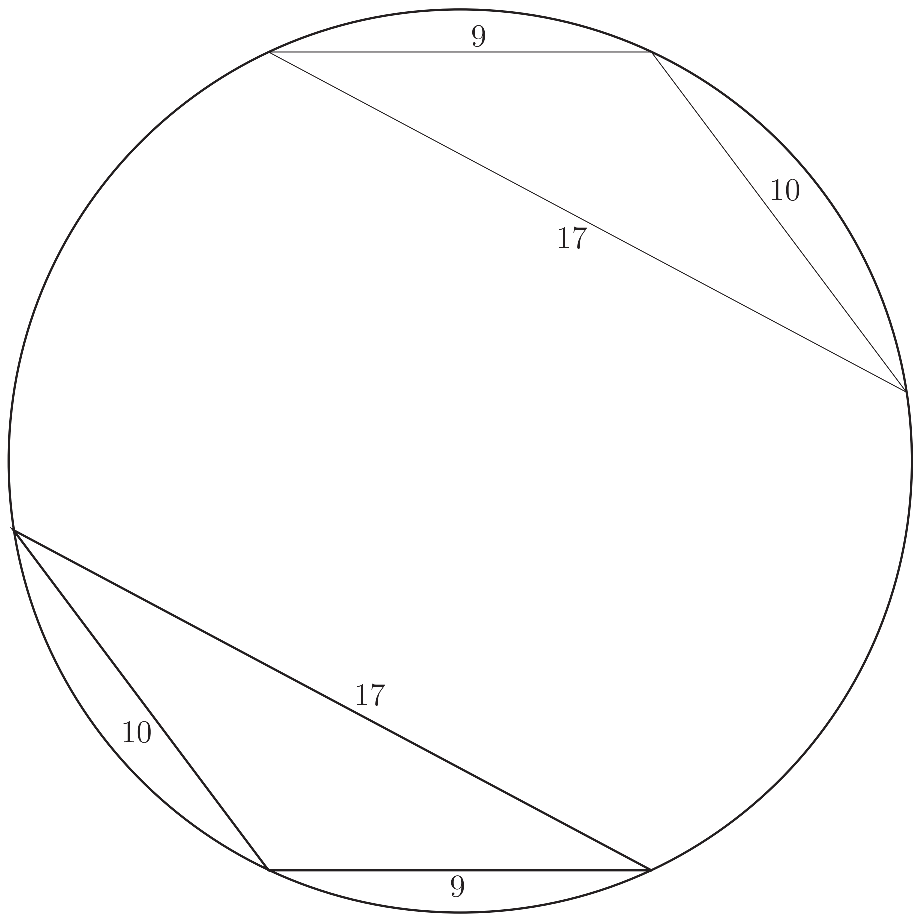
動手玩數學（高一版）

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

June 13, 2006



三角形的邊長、面積、三內角的三
角函數值與外接圓半徑都是有理數

《動手玩數學》序

《動手玩數學》分為〈高一〉與〈高二〉兩冊，本書是第一冊，用意在寓高中數學於遊戲之中。本書的每一回以高中數學的某章某節的數學概念為題，所精心設計出來的新穎數學趣題。前幾回算是國三升高一的銜接問題，其目的在於讓初中生快速養成具有思考與邏輯能力的學生。《動手玩數學》每回的難度用顆星☆來呈現，從一顆星☆的入門題到五顆星☆☆☆☆☆的思考題都有。每一回分成三部分，第一部份是題幹敘述與顆星設定，第二部份稱為〔玩鎖・玩索〕，是對題目的歷史背景做介紹，或對解題的方法提供提示，或者對所需的數學資料做溯源與整理的工作（包含擴張與延伸）。第三部份則是解答，為了讓學生真正的動手玩數學，第三部份的解答不在本書裡，而是放在本人的數學網站《師父中的師父》上，歡迎前往下載：

http://math.ntnu.edu.tw/∼maco/play.htm

《動手玩數學》盡可能以自然科學資訊當背景、人文素養為材料、社會典故做情境，集結這三種模型開創高中數學問題的另一個平台。提供有以下需求的人使用：

(1) 以國中基測上高中的國三學生之消暑良方。（本書前部分）

(2) 國中升高中暑假開學前輔導教材。（本書前部分）

(3) 高一數理資優班的補充教材，每週一回的進度。

(4) 高一寒、暑假指定閱讀書籍，本書可以順便溫習這一年所學的數學重點。

(5) 中學老師出題或充實使用。

最後，感謝李坤峰老師的提供資料與校對，許琬青老師的意見與繪圖。

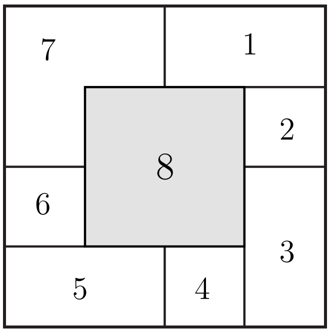
許志農　　敬上
二００六年六月
maco@math.ntnu.edu.tw

目 錄

4 動手玩數學解答

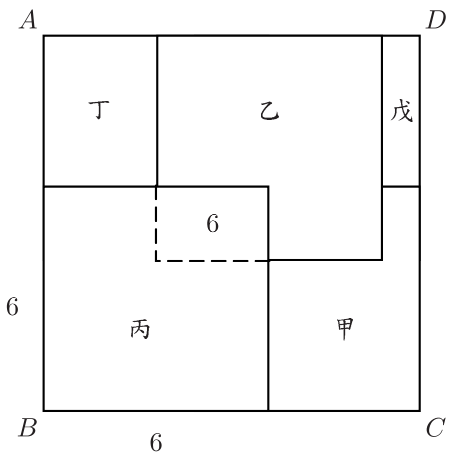
遊戲 1 解答

依數字從小到大將正方形重疊上來：

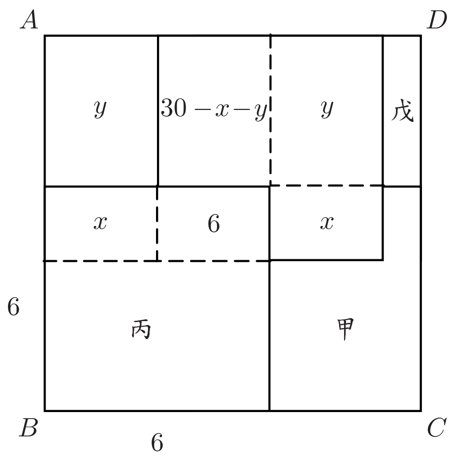


☒

〈玩鎖・玩索〉裡的題目參考解答：從丙的面積為 36 平方公分得知，五個正方形都是邊長為 6 的正方形。如〈圖一〉所示，乙和丙重疊的長方形面積為 $36 - 30 = 6$ 平方公分。接下來，將乙與丁被蓋住的部分用虛線呈現出來，並令從上面看到丁部分的面積為 y，下方的長方形面積為 x，如〈圖二〉所示。又將乙正方形向左推到邊線產生丁正方形，所以乙扣掉丁之後的兩塊面積依序為〈圖二〉所示的 y 與 x。因為從上面看到乙部分的面積為 30，所以面積 6 上方的長方形之面積為 $30 - x - y$。



〈圖一〉



〈圖二〉

因為 $ABCD$ 是正方形，所以丙正右邊的長方形面積 $18+x$ 與丙正上方的長方形面積 $y+(30-x-y)$ 相等，即

$$18+x=y+(30-x-y) \Rightarrow x=6.$$

利用比例關係，得

$$30-x-y=y \Rightarrow 2y=30-x=24 \Rightarrow y=12.$$

因此，從上面看到丁部分的面積為 12 平方公分。

類似的方法可以推得，從上面看到戊部分的面積為 4 平方公分。事實上，不難推得，正方形 $ABCD$ 的邊長剛好是 10 公分。☒

遊戲 2 解答

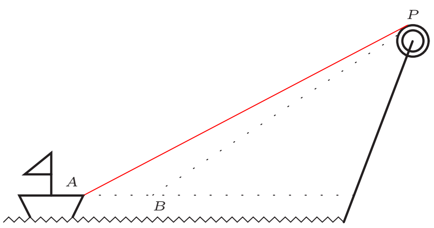
假設第 ① 步時，（左、中、右）的牌數為 (x,x,x)，在第 ② 步時，變成 $(x-2,x+2,x)$，又第 ③ 步時，變成 $(x-2,x+3,x-1)$，最後第 ④ 步時，變成

$$(2(x-2),(x+3)-(x-2),x-1)=(2x-4,5,x-1).$$

所以中間那堆牌最後的張數都是 5 張。 ☒

遊戲 3 解答

如下圖所示



滑輪捲動的繩子長度為

$$|PA-PB|;$$

而輪船前進的距離為

$$AB.$$

由三角形 PAB 的三角形不等式知道

$$|PA - PB| < AB,$$

即滑輪捲動的繩子長度 $<$ 輪船前進的距離。 ⊠

遊戲 4 解答

師大數學系謝淑莉同學的解：

(1) 第一位醫師戴上第一副手套之後，再套上第二副手套，然後進行手術，即第一位醫師的兩手各戴兩隻手套。術後第二副手套外部被藍委員的皮膚病感染，第一副手套內部可能被第一位醫師感染，也可能沒被感染，但第一副手套外部與第二副手套內部肯定是乾淨的。第一位醫師將右手的第二隻手套反套在他的左手。此時，第一位醫師的右手有一隻手套，而左手套了三隻手套。

(2) 第一位醫師將兩手手套反套給第二位醫師，此時第二位醫師的右手有一隻手套，左手套了三隻手套。術後將左手外面兩層手套套到他的右手。再將兩手的手套反套給第三位醫師。

(3) 這樣就可以完成任務，而且醫師間不會互相感染。

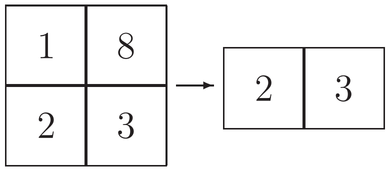
台北縣金山高級中學的郭凡瑞同學的解：

第一位醫師戴上第一副手套之後，右手再套上第二副手套的兩隻（即第一位醫師左手戴一隻手套，而右手戴三隻手套的意思）。接下來將該醫師右手最外的手套反套回他的左手，此時第一位醫師雙手各套兩隻手套。然後，第一位醫師將雙手反套給第二位醫師，此時第一位醫師所接觸的手套變成第二位醫師的外套。接著，第二位醫師再將右手最外的手套反套回他的左手。此時第二位醫師左手套三隻手套，右手僅套一隻，且兩隻外套都是乾淨，未被污染。最後第二位醫師只需將手套再反套給第三位醫師即可。

〔註〕這問題還有第三種解法，你想到了嗎？ ⊠

遊戲 5 解答

摺成 12345678 是可以辦到的，方法如下：先對摺地圖成下圖中的左圖



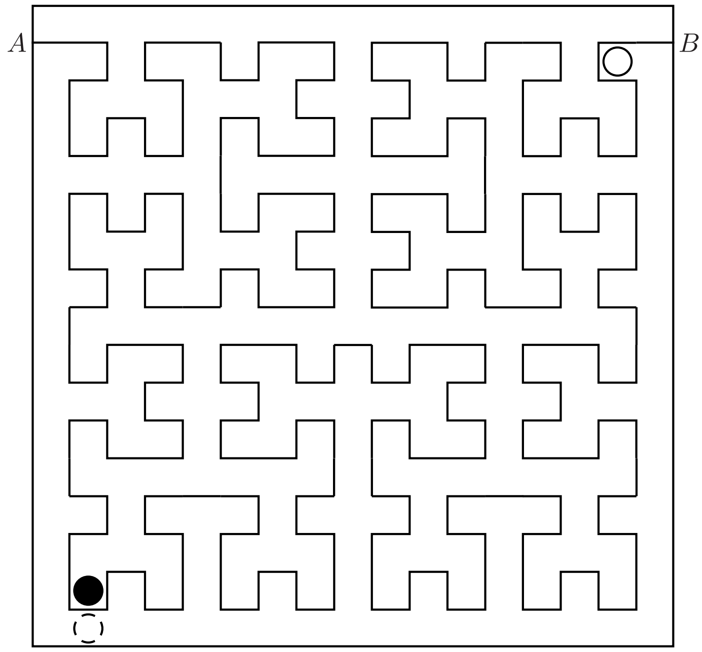
再對摺成上圖中的右圖。此時地圖厚度是四頁，依序為 $\underline{2,3}$，$\underline{5,6}$，$\underline{4,7}$ 與 $\underline{1,8}$。接下來，將 $\underline{2,3}$ 那一頁往上掀，此時會看到 $\underline{5,6}$ 的第二張與 $\underline{4,7}$ 的第三張。用手抓著 $4,5$ 兩頁向上並往內摺，最後抓著 $1,2$ 兩頁向上往 3 那邊貼即完成。

遊戲 6 解答

將杯口朝下的杯子定義為 -1，杯口朝上的杯子定義為 $+1$。剛開始，因為五只茶杯的杯口都朝下，所以有五個 -1，其乘積 $(-1)^5=-1$。每操作一次，會有兩個杯子的杯口改變，也就是，兩個數字變號。這意味著，其乘積不會改變，也就是說，無論操作幾次，五只茶杯的正負乘積仍然是 -1。所以不可能讓背口都朝上（此種情況需乘積為 $+1$）。 $\boxtimes$

遊戲 7 解答

如下圖所示，從 A 點出發，沿著希爾伯特曲線前進，最後會走到 B 點，而且希爾伯特曲線在任何地方都不相交，即可以將希爾伯特曲線想成連接 A,B 兩點的一條繩索。因此，正方形迷宮被希爾伯特繩索分割成兩個區域，在同一區域的點才能到達，不同區域的兩個點沒辦法相通。白色球走到虛白色球位置，此時虛白色球與灰色球相隔一繩索，即白色球與灰色球剛好分佈在不同的區域。故白色球與灰色球無法相遇。



☒

遊戲 8 解答

由此表知 $O*O=O*A=O*B=O*AB=+1$，O 型的人能輸給任何血型的人；而任何血型的人都可輸血給 AB 型的人（$\because AB$ 的正下方都是 $+1$）；又對角線都是 $+1$，所以同血型的人可以互相輸血，故 (1)(2)(4) 正確。

因為 A 型的人可輸血給 AB 型的人，但 AB 型的人卻不可輸血給 A 型的人，故 (3) 錯誤。由表知，(5) 正確（這選項的檢驗是比較困難的）。

故答案為 (1)(2)(4)(5)。 ☒

遊戲 9 解答

圖片中記錄的是正整數

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$$

乘以 9 的運算結果，第一列是這 14 個正整數，第二與第三列是運算結果。所以

$$\triangledown = 1, \quad \triangleleft = 10, \qquad ◸ = 60.$$

$\boxtimes$

〔玩鎖・玩索解答〕如下圖所示：將左邊是奇數的數字所平行對過去的數字劃掉，將右邊留下的數字相加，就得到乘積

$$73 \times 217 = 217 + 1736 + 13888 = 15841.$$

$$\begin{array}{rr}
73 & 217 \\
36 & \cancel{434} \\
18 & \cancel{868} \\
9 & 1736 \\
4 & \cancel{3472} \\
2 & \cancel{6944} \\
1 & 13888 \\
\hline
 & 15841
\end{array}$$

不相信的話，可以試試看其它別的例子。這法則的證明與數字的 2 進位有關。

$\boxed{\text{遊戲 10 解答}}$

先玩者有必勝的策略，方法為拔 $2, 5$ 或 7 號的數。 $\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 11 解答}}$

依編碼規定

$$1\times0+2\times0+3\times\blacksquare+4\times6+5\times2+6\times0+7\times1+8\times1+9\times2 = 75+3\times\blacksquare$$

為 11 的倍數，即 $11|(75 + 3 \times \blacksquare)$。合條件的數字 $\blacksquare = 8$。 $\boxtimes$

〔玩鎖・玩索解答〕將八個數字依序乘以 $8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$，其和為 11 的倍數。

$\boxed{\text{遊戲 12 解答}}$

如本遊戲的〔玩鎖・玩索〕所言，正整數 n 的最佳分解就是 n 開菊版紙的尺寸公式，舉例來說， 18 開的菊版紙就是將全開的菊版

紙，水平等分成 3 等分，鉛直等分成 6 等分，這樣所切割出來的紙張就是 18 開菊版紙的大小。

至於為何採取最佳分解的切割方式呢？原因是這樣所分割出來的紙張比較方正，長、寬比較接近黃金比例。

因為面積是 12.5 平方英吋的名片與面積 $25 \times 35 = 875$ 平方英吋全開菊版紙的比例為

$$\frac{12.5}{875} = \frac{1}{70},$$

所以這種名片是 70 開菊版紙的大小。 $\boxtimes$

遊戲 13 解答

將三位數 abc 改寫成 $100a + 10b + c$，所以

$$\begin{aligned}19|abc &\Leftrightarrow 19|(5a + 10b + c) + 95a\\ &\Leftrightarrow 19|(5a + 10b + c)\\ &\Leftrightarrow 19|2(5a + 10b + c)\\ &\Leftrightarrow 19|(10a + 20b + 2c)\\ &\Leftrightarrow 19|(10a + b + 2c).\end{aligned}$$

從這個推導過程知道：abc 是否為 19 的倍數，只需判斷 $10a+b+2c$ 是否為 19 的倍數即可。 $\boxtimes$

遊戲 14 解答

將 $\square 4 \triangle 7$ 表為未知數與已知數分離的式子

$$1000\square + 10\triangle + 407.$$

因為 1000 除以 37 的餘數為 1，所以 $1000\square$ 除以 37 的餘數與 $\square$ 除以 37 的餘數一樣。又 407 除以 37 的餘數為 0，所以 $1000\square+10\triangle+407$ 除以 37 的餘數與 $10\triangle+\square$ 除以 37 的餘數一樣，即 $37|(10\triangle+\square)$。解得

$$10\triangle + \square = 37 \text{ 或 } 74.$$

因為 △ 比數字 □ 大，所以 $\triangle = 7, \square = 4$。故哈蜜瓜一顆

$$\frac{4477}{37} = 121$$

元。 ⊠

遊戲 15 解答

利用

$$a = bq + r \Rightarrow (a,b) = (b,r)$$

知道：任何時候，甲、乙堆方糖數的最大公因數都與 (a,b) 相等，又最後有一堆的方糖數為 0（根據規則 (2)，必定是乙堆被拿光），所以甲堆有 (a,b) 顆方糖，乙堆有 0 顆方糖，而丙堆有 $a+b-(a,b)$ 顆方糖。 ⊠

遊戲 16 解答

(1) 由計算機或電腦知黃金比值 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$。

(2) 設志玲應穿 x 公分（整數）高的高跟鞋，由黃金比值知

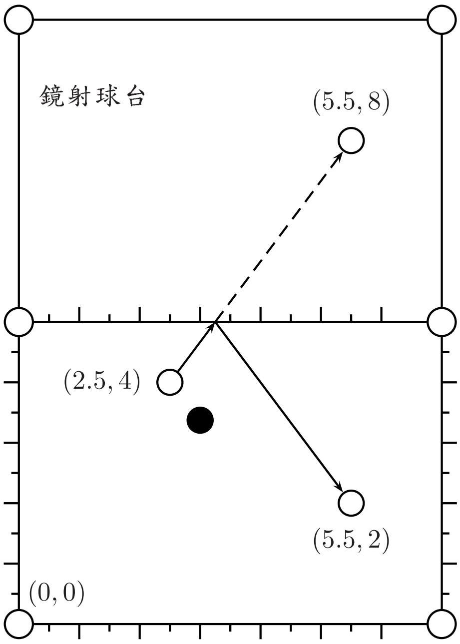
$$\frac{x+173}{x+105} = 1.618 \Rightarrow 0.618x = 173 - 105 \times 1.618.$$

解得 $x \approx 5.03$，志玲應該穿 5 公分高的高跟鞋。

⊠

遊戲 17 解答

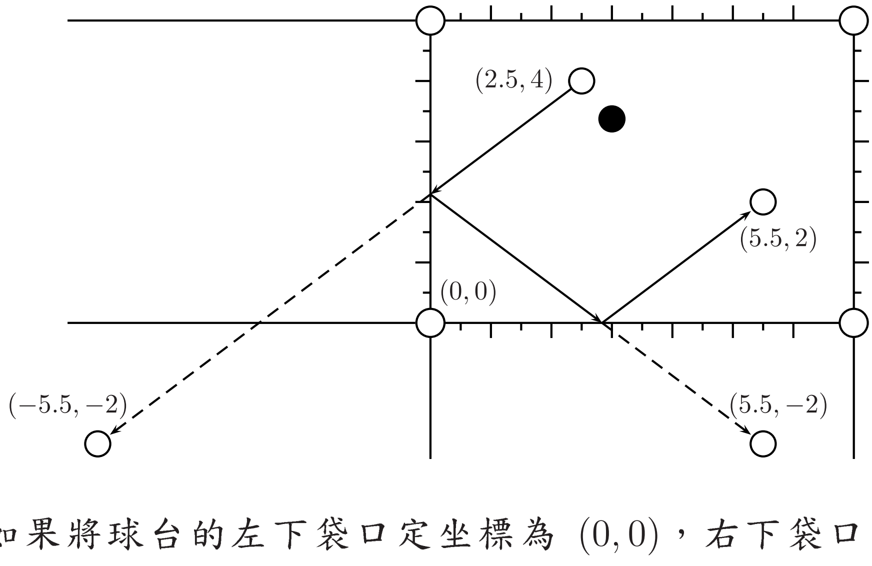
(1) 如果將球台的左下袋口定坐標為 $(0,0)$，右下袋口定坐標為 $(7,0)$，那麼兩顆白球的坐標分別為 $(2.5,4)$ 與 $(5.5,2)$，鏡射之後的白球坐標為 $(5.5,8)$。



利用坐標平面上兩點的距離公式，得欲求的路徑長度為

$$\sqrt{(5.5-2.5)^2+(8-4)^2}=5（單位）。$$

(2) 同樣，利用入射角等於反射角的鏡射原理，將折線拉直，如下圖所示（想成將球台往下及左作對稱）



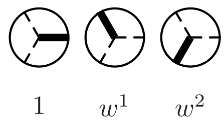
如果將球台的左下袋口定坐標為 $(0,0)$，右下袋口定坐標為 $(7,0)$，那麼兩顆白球的坐標分別為 $(2.5,4)$ 與 $(5.5,2)$，鏡射之後的白球坐標為 $(-5.5,-2)$。利用坐標平面上兩點的距離公式，得欲求的路徑長度為

$$\sqrt{(-5.5-2.5)^2+(-2-4)^2}=10（單位）。$$

☒

遊戲 18 解答

考慮三種不同方向的方向盤與複數 $1, w^1, w^2$ 對應的情形：



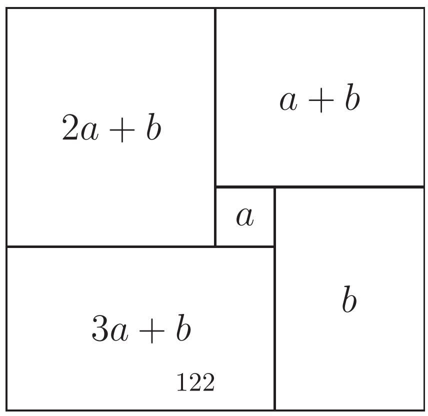
此時，十個方向盤所對應的複數之乘積為

$$w^2 \cdot w^2 \cdot w^2 \cdot 1 \cdot w \cdot w \cdot 1 \cdot w^2 \cdot w^2 \cdot 1 = w^{12} = 1.$$

當甲轉動某個方向盤之後，乘積變成 w，但是消掉的乘積都是 1，因此，最後剩下方向盤的乘積為 w，即至少還有一個方向盤；而當乙轉動某個方向盤之後，乘積變成 w^2，即至少還有一個方向盤；最後當丙轉動某個方向盤之後，乘積變成 $w^3 = 1$，有可能消光。由於方向盤數會慢慢減少，一定有人會消光，贏得比賽，此人必是丙。故丙有必勝的策略。只要甲、乙不耍無賴，玩到底，丙就一定會贏。 ☒

遊戲 19 解答

假設有五個小正方形可以圍成大矩形，並令中央及右下角的正方形邊長為 a 與 b（$a, b > 0$）。依逆時鐘方向將其餘三個小正方形的邊長以 a, b 來表示，即右上正方形的邊長為 $a+b$，左上正方形的邊長為 $a+(a+b) = 2a+b$，左下正方形的邊長為 $a+(2a+b) = 3a+b$。



因為圍成大矩形，所以左側的高等於右側的高，即

$$(3a+b)+(2a+b)=b+(a+b)\Rightarrow a=0,$$

矛盾，也就是說，不可能利用五個正方形，在要求的相關位置上，圍出一個大矩形。 ☒

遊戲 20 解答

(1) 觀察大拇指所數的前幾個數為

$$1,9,17,\cdots.$$

再考慮手指數數的實際操作情形，從大拇指數過去，再數回大拇指時，會增加 8 個數。所以大拇指所數的數是首項 1，公差 8 的等差數列。也就是說，大拇指數的第 n 個數為

$$1+8(n-1)=8n-7.$$

(2) 利用不等數 $8n-7\leq 999$ 得 $n\leq 125\frac{6}{8}$。因為大拇指第 125 回數到的數為 $8\cdot 125-7=993$，所以 999 被中指數到。

〔玩鎖・玩索答案〕第一題：478，第二題：$4n+2$。 ☒

遊戲 21 解答

(1) 因為 $b_1=3$，每一次迭代都把一個灰色三角形分割成 3 個小灰色三角形，所以 $\langle b_n\rangle$ 是首項 $b_1=3$，公比 3 的等比數列。即一般項

$$b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n.$$

(2) 根據「第 2 圖是將第 1 圖再挖 3 個三角形而得，第 3 圖是將第 2 圖再挖 3^2 個三角形而得，⋯」，得知 w_n 可以表示成如下的級數和

$$w_n=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}.$$

〔玩鎖・玩索解答〕

(1)

$$a_n = 4a_{n-1}.$$

(2)

$$a_n = 3 \cdot 4^{n-1}.$$

(3)

$$b_n = \frac{4}{3} b_{n-1}.$$

(4)

$$b_n = b_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = 3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

$\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 22 解答}}$

(1) 經實際操作之後，得到

$$P_1 = P_2 = P_3 = \cdots.$$

(2) 經實際操作之後，得到

$$P_1 = P_3 = P_5 = \cdots, P_2 = P_4 = P_6 = \cdots$$

的週期現象，而且 $\overline{P_2C} = 2$。

$\boxtimes$

〔玩鎖・玩索解說〕

(1) 當 $\overline{P_1C} = \frac{a+b-c}{2}$ 時，會產生 $P_1 = P_2$ 的不動現象。當 $\overline{P_1C} \neq \frac{a+b-c}{2}$ 時，大都會產生

$$P_1 = P_3 = P_5 = \cdots, P_2 = P_4 = P_6 = \cdots$$

的週期現象，而且 $\overline{P_1C} + \overline{P_2C} = a + b - c$。

(2) 當四邊形的對邊和相等時，無論從和點出發，大都會繞一圈之後回到出發點。當四邊形的對邊和不相等時，會繞出四邊形外或卡在頂點上。

遊戲 23 解答

因為 $a_1 = k$ 為奇數，所以 $a_2 = 3k+1$ 為偶數。再根據定義得到

$$a_3 = \frac{3k+1}{2}.$$

當 $a_3 = \frac{3k+1}{2}$ 為奇數時

$$a_4 = 3\cdot\frac{3k+1}{2} + 1 = \frac{9k+5}{2} = 169 \Rightarrow a_1 = k = 37.$$

當 $a_3 = \frac{3k+1}{2}$ 為偶數時

$$a_4 = \frac{\frac{3k+1}{2}}{2} = 169 \Rightarrow k = 225.$$

答案：$a_1 = 37$ 或 225。 ☒

遊戲 24 解答

因為等差中項為 $\frac{1}{21}$，所以

$$\begin{aligned}
\frac{2}{21} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\Rightarrow 2ab - 21a - 21b = 0\\
&\Rightarrow a(2b-21) - 21b = 0\\
&\Rightarrow a(2b-21) - \frac{21}{2}(2b-21) = \frac{441}{2}\\
&\Rightarrow \left(a - \frac{21}{2}\right)(2b-21) = \frac{441}{2}\\
&\Rightarrow (2a-21)(2b-21) = 3^2\cdot 7^2.
\end{aligned}$$

由最後的因數分解得到

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
2a-21 & 1 & 3 & 7 & 9\\ \hline
2b-21 & 441 & 147 & 63 & 49
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c|c|c|c|c}
a & 11 & 12 & 14 & 15\\ \hline
b & 231 & 84 & 42 & 35
\end{array}$$

所以數對 (a,b) 有四組為

$$(a,b)=(11,231),\ (12,84),\ (14,42),\ (15,35).$$

$\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 25 解答}}$

(1) 如〔玩鎖・玩索〕的提示，矩形領海面積為

$$ld,$$

而三個圓弧形領海剛好拼成一個圓形，所以圓弧形領海為

$$\pi d^2.$$

故三角形狀國家的總領海面積為

$$ld+\pi d^2=(l+\pi d)d.$$

(2) 國家形狀為凸四邊形的矩形領海面積為

$$ld.$$

因為四邊形的內角和為 $360°$，所以四個圓弧形領海同樣拼成一個圓形，即圓弧形領海為

$$\pi d^2.$$

故凸四邊形國家的總領海面積為

$$ld+\pi d^2=(l+\pi d)d.$$

(3) 國家形狀為凸 n 邊形的矩形領海面積為

$$ld.$$

而將 n 個圓弧形領海經平移拼在一起，會構成一個圓形，故圓弧形領海為

$$\pi d^2.$$

因此，凸 n 邊形國家的總領海面積為

$$ld + \pi d^2 = (l + \pi d)d.$$

〔註〕n 個圓弧形領海拼在一起，會構成一個圓形的另一種代數解釋：
因為凸 n 邊形的內角和為 $(n-2) \times 180^\circ$，所以 n 個圓弧形領海的圓周角和為

$$n \cdot 2 \times 180^\circ - (n-2) \times 180^\circ - 2 \cdot n \cdot \frac{180^\circ}{2} = 360^\circ,$$

即凸 n 邊形的 n 個圓弧形領海同樣拼成一個圓形，故圓弧形領海為

$$\pi d^2.$$

(4) 從 (3) 中知道，只要是海岸線長度為 l 的凸 n 邊形島國，它的領海面積都是

$$ld + \pi d^2 = (l + \pi d)d.$$

因為這個公式跟 n 無關，所以若將 n 取至很大時，凸 n 邊形島國就近似於周長 l 的圓形島嶼，而其領海面積還是 $(l+\pi d)d$。因此，猜想圓形島國的領海面積還是 $(l + \pi d)d$。驗證如下：令周長 l 的圓形島嶼之半徑為 r，由 $2\pi r = l$ 得到 $r = \frac{l}{2\pi}$。圓形島嶼的領海面積為

$$\pi(r+d)^2 - \pi r^2 = 2\pi rd + \pi d^2 = ld + \pi d^2 = (l + \pi d)d.$$

⊠

遊戲 26 解答

令 a_n 為該女子第 n 個月織布尺數，依題意知道遞迴關係式為

$$a_n = \frac{3}{2}a_{n-1} + 1, \quad n \geq 2.$$

將此遞迴關係式改寫成

$$(a_n + 2) = \frac{3}{2}\left(a_{n-1} + 2\right), \quad n \geq 2$$

的形式。因此，數列 $\langle a_n+2\rangle$ 是首項 $a_1+2=14+2=16$，公比 $\frac{3}{2}$ 的等比數列，其第 n 項 a_n+2 為

$$a_n+2=16\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\Rightarrow a_n=16\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2.$$

(1) 第五個月織

$$a_5=16\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{5-1}-2=79$$

尺。

(2) 第 n 個月該女子織布

$$16\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2$$

尺。

⊠

遊戲 27 解答

設對邊門牌號碼為

$$1,3,5,\cdots,2n-1.$$

因為兩邊的門牌號碼沒有跳號，所以汀菱的別墅門牌號碼不是 $2n-2$ 就是 $2n$ 號。又級數和

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

所以

$$n^2=(2n-2)+323 \quad 或 \quad n^2=2n+323,$$

即

$$n^2-2n+321=0 \quad 或 \quad n^2-2n-323=0.$$

第一個二次方程式沒有政整數解，而第二個方程式可以分解為 $(n-19)(n+17)=0$，即 $n=19$。

故汀菱的別墅門牌號碼是環山路 $2n=38$ 號。 ⊠

$\boxed{\text{遊戲 28 解答}}$

(1) 當 $2n+1$ 人玩此遊戲時，被殺的人依序為

$$2, 4, 6, \cdots, 2n$$

共 n 人。故留下來的人數有

$$(2n+1) - n = n+1$$

人。即求碎形數列的第 $2n+1$ 項 F_{2n+1} 的值。

(2) 碎形數列接下來五項分別為

$$30, \quad 8, \quad 31, \quad 16, \quad 32, \quad 1.$$

$\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 29 解答}}$

(1) 動手計算，得

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1) = f(1) \\ &= \frac{5}{3}(1)^3 - \frac{15}{2}(1)^2 + \frac{47}{6}(1) + 1 \\ &= 3 \\ x_3 &= f(x_2) = f(3) \\ &= \frac{5}{3}(3)^3 - \frac{15}{2}(3)^2 + \frac{47}{6}(3) + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

(2) 再計算 x_4, x_5，得

$$\begin{aligned} x_4 &= f(x_3) = f(2) \\ &= \frac{5}{3}(2)^3 - \frac{15}{2}(2)^2 + \frac{47}{6}(2) + 1 \\ &= 0 \\ x_5 &= f(x_4) = f(0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

從 $x_1=1, x_2=3, x_3=2, x_4=0, x_5=1$ 及 $x_6=f(x_5)=f(1)=x_2=3$ 得，跌代數列 $\langle x_n\rangle$ 是每四個一循環的周期數列。

$\boxtimes$

遊戲 30 解答

因為

$$\begin{aligned} n^4+2n^3+3n^2+2n+1 &= \left(n^4+2n^3+n^2\right)+2\left(n^2+n\right)+1 \\ &= \left(n^2+n\right)^2+2\left(n^2+n\right)+1 \\ &= \left(n^2+n+1\right)^2 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} n^4+2n^3+3n^2+2n+1 &= \left(n^4+2n^2+1\right)+2n\left(n^2+1\right)+n^2 \\ &= \left(n^2+1\right)^2+2n\left(n^2+1\right)+n^2 \\ &= \left(n^2+n+1\right)^2, \end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

因此所求的和為

$$99+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right),$$

消掉之後，得

$$99\frac{99}{100}.$$

$\boxtimes$

遊戲 31 解答

假設歐基里德造的整係數多項式為 $f(x)$ 及那時的年紀為 a 歲，並設旁邊的人所代入較大的數為 L。根據題意我們有

$$\begin{cases} f(7)=77 \\ f(L)=85 \\ f(a)=0 \\ 7<L<a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-7)\mid -77(=0-77) \\ (L-7)\mid 8(=85-77) \\ (a-L)\mid -85(=0-85) \\ 7<L<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=8,14,18,84 \\ L=8,9,11,15 \\ (a-L)\mid 85 \\ 7<L<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=14, \\ L=9. \end{cases}$$

因此當時歐基里德的年紀為 14 歲，所以他出生於西元前 350 年。☒

$\boxed{\text{遊戲 32 解答}}$

如果令正方形右下角的坐標為 (x,y)，那麼正方形左上角的坐標應為 (y,x)。又這兩個點 $(x,y),(y,x)$ 都在拋物線上，所以 x,y 滿足多項式方程組

$$\begin{cases} y=\frac{7}{2}x(1-x); \\ x=\frac{7}{2}y(1-y). \end{cases}$$

將兩式相減，得

$$(x-y)=\frac{7}{2}\left(y-y^2-x+x^2\right)=\frac{7}{2}(x-y)(x+y-1)\Rightarrow x+y=\frac{9}{7}.$$

將 $x+y=\frac{9}{7}$ 代入 $y=\frac{7}{2}x(1-x)$，得

$$49x^2-63x+18=0\Rightarrow(7x-3)(7x-6)=0.$$

解得 $x=\frac{3}{7}$ 或 $\frac{6}{7}$。故拋物線上取的點坐標為

$$\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right) \quad \text{與} \quad \left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right).$$

$\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 33 解答}}$

利用多項式的直式算法將兩個多項式相乘，可以得到

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4.$$

$\boxtimes$

〔玩鎖・玩索參考答案〕乘開後，得

$$x^4 - 5x^2 + 5.$$

$\boxed{\text{遊戲 34 解答}}$

設 $f(x) = x^3 - 3cx + c^3$，將 $x = -3, -c, c, 3$ 分別代入求得函數值

$$\begin{aligned}
f(-3) &= (-3)^3 - 3c(-3) + c^3 = c^3 + 9c - 27 < 2^3 + 9 \cdot 2 - 27 < 0;\\
f(-c) &= (-c)^3 - 3c(-c) + c^3 = 3c^2 > 0;\\
f(c) &= c^3 - 3c^2 + c^3 = c^2(2c - 3) < 0;\\
f(3) &= 3^3 - 3c \cdot 3 + c^3 = c^3 - 9c + 27 > 27 - 9c = 9(3 - c) > 0.
\end{aligned}$$

由多項式的勘根定理，知道 $f(x) = 0$ 在 $-3, -c$ 之間，$-c, c$ 之間及 $c, 3$ 之間各有一實數根。故有三個實數根。 $\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 35 解答}}$

設三根為 $a - d, a, a + d (d \geq 0)$，利用根與係數的關係，得

$$(a - d) + a + (a + d) = 24 \Rightarrow a = 8.$$

再用根與係數的關係，得

$$(8 - d)(8 + d) + 8(8 - d) + 8(8 + d) = 183 \Rightarrow d = 3.$$

故該三次方程式的三根為

$$5,\ \ 8,\ \ 11.$$

$\boxtimes$

遊戲 36 解答

令 $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，顯然 w 滿足

$$w^3=1,\quad w^2+w+1=0.$$

將

$$f(x)=(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$$

的 x 分別代 $1,w$ 及 w^2，得

$$3^n=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\cdots+a_{2n} \tag{1}$$
$$0=a_0+a_1w+a_2w^2+a_3+a_4w+a_5w^2+\cdots+a_{2n}w^{2n} \tag{2}$$
$$0=a_0+a_1w^2+a_2w+a_3+a_4w^2+a_5w+\cdots+a_{2n}w^n \tag{3}$$

由 $(1)+(2)+(3)$ 得

$$3^n=3(a_0+a_3+a_6+\cdots)\Rightarrow a_0+a_3+a_6+\cdots=3^{n-1}.$$

再由 $(1)+(2)w^2+(3)w$ 得

$$3^n=3(a_1+a_4+a_7+\cdots)\Rightarrow a_1+a_4+a_7+\cdots=3^{n-1}.$$

最後由 $(1)+(2)w+(3)w^2$ 得

$$3^n=3(a_2+a_5+a_8+\cdots)\Rightarrow a_2+a_5+a_8+\cdots=3^{n-1}.$$

⊠

遊戲 37 解答

(1) 按照「議會規模立方根法則」，該國應該選出

$$S=\sqrt[3]{2\cdot 13500000}=\sqrt[3]{27000000}=300$$

位立法委員。

(2) 因為台灣成年的識字人口數至少超過兩千三百萬人口的一半，所以按照「議會規模立方根法則」，台灣的立法委員總額 S 滿足

$$S\geq\sqrt[3]{2\cdot 11500000}=\sqrt[3]{23500000}=10\sqrt[3]{23.5}\approx 286.$$

依「議會規模立方根法則」，台灣現有立法委員總額兩百二十五席太少。

$\boxtimes$

遊戲 38 解答

(1) 將「能力 1.0 的學生答對率為 25%」的數據代入函數 $P(x)$，得

$$25\% = P(1.0) = \frac{3^{1-a}}{1+3^{1-a}} \Rightarrow 3^{2-a} = 1 \Rightarrow a = 2.$$

(2) 由 (1) 知道

$$P(x) = \frac{3^{x-2}}{1+3^{x-2}}.$$

能力 3.0 的學生之答對率為

$$P(3.0) = \frac{3^{3-2}}{1+3^{3-2}} = 75$$

而能力 4.0 的學生之答對率為

$$P(4.0) = \frac{3^{4-2}}{1+3^{4-2}} = 90$$

(3) 代入，得

$$\begin{aligned} P(x)+P(4-x) &= \frac{3^{x-2}}{1+3^{x-2}} + \frac{3^{(4-x)-2}}{1+3^{(4-x)-2}} \\ &= \frac{3^{x-2}}{1+3^{x-2}} + \frac{3^{2-x}}{1+3^{2-x}} \\ &= \frac{3^{x-2}}{1+3^{x-2}} + \frac{\frac{1}{3^{2-x}}}{1+\frac{1}{3^{2-x}}} \\ &= \frac{3^{x-2}}{1+3^{x-2}} + \frac{1}{1+3^{x-2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

式子 $P(x)+P(4-x)=1$ 代表「能力 x 與能力 $4-x$ 的答對率之和剛好 100%，例如，能力 1 的答對率為 25% 可以推得

能力 $3=4-1$ 的答對率為 75%，能力 4 的答對率為 90% 可以推得能力 $0=4-4$ 的答對率為 10%；反應在 S 型曲線的幾何意義為，點 $(x,P(x))$ 與點 $(4-x,P(4-x))$ 的中點為固定點 $(2,0.5)$。」

$\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 39 解答}}$

設申克功算出來的答案為 n，也就是說

$$n=\sqrt[13]{13\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc}.$$

推得

$$13\times 10^9\leq n^{13}<14\times 10^9.$$

取對數並利用 $\log 13\approx 1.1139,\log 14=\log 2+\log 7\approx 0.3010+0.8451\approx 1.1461$，得

$$1.1139+9\leq 13\log n<1.1461+9.$$

整理得

$$0.778\leq \log n<0.781.$$

因為

$$\begin{aligned}&\log 5=\log 10-\log 2\approx 1-0.3010\approx 0.6990\\&\log 6=\log 2+\log 3\approx 0.3010+0.4771\approx 0.7781\\&\log 7\approx 0.8451,\end{aligned}$$

所以 $n=6$。 $\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 40 解答}}$

因為 $2^{30402457}-1$ 與 $2^{30402457}$ 僅相差 1，所以估計 $2^{30402457}$ 的大小就可以。利用 $\log_{10}2\approx 0.3010$ 得

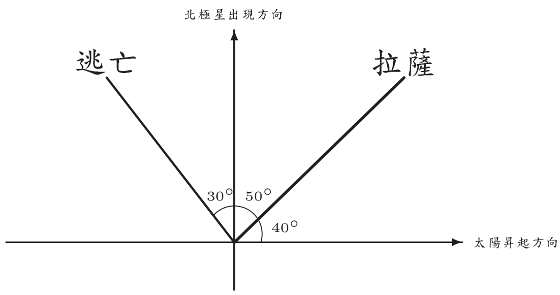
$$\log_{10}2^{30402457}=30402457\log_{10}2\approx 9151139.56.$$

這告訴我們，$2^{30402457}-1$ 是大約 915 萬位數的數字，沒有超過 1000 萬位數字。因此，無法獲得十萬美元的獎金。

如果利用更精確的對數表 $\log_{10} 2 \approx 0.30102999566$，可以算得更精確，得到 $2^{30402457}-1$ 是一個 9152052 位的天文數字。 ☒

遊戲 41 解答

將直角坐標定調為 x 軸正向是「太陽昇起的方向」； y 軸正向是「北極星出現的方向」。有了這樣的定位之後，由「北極星出現在前往拉薩之路正前方偏左 50 度的方位上」知「前往拉薩之路與正東夾 $40°$」；由「太陽在他逃亡小路正前方偏右 120 度的方向昇起」知「逃亡小路與正北夾 $30°$」。畫圖如下：



所以南星前往拉薩之路與落荒而逃的小路之夾角是

$$30° + 50° = 80°.$$

☒

遊戲 42 解答

(1) 三角形內部的點所畫的正方形大都落在三角形內部，所以一點對應到一平方單位的面積。因為有 I 個內部點，所以有 $I \times 1 = 1$ 平方單位的面積。

(2) 三角形邊上，但不是頂點的點所畫的正方形，只有一半在三角形內部，另一半在外部，所以一點對應到半平方單位的面積。因為有 $S-3$ 個邊上，但不是頂點的點，所以有 $(S-3)\times\frac{1}{2}=\frac{S}{2}-\frac{3}{2}$ 平方單位的面積。

(3) 三個頂點所畫三個正方形，其落在三角形內的灰色區域面積和，根據〔玩鎖・玩索〕提示，剛好是正方形面積的一半，所以對應的面積為半平方單位的面積，即算 $\frac{1}{2}$ 平方單位的面積。

綜合得到，三角形面積公式為

$$I+\frac{S}{2}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{S}{2}+I-1.$$

$\boxtimes$

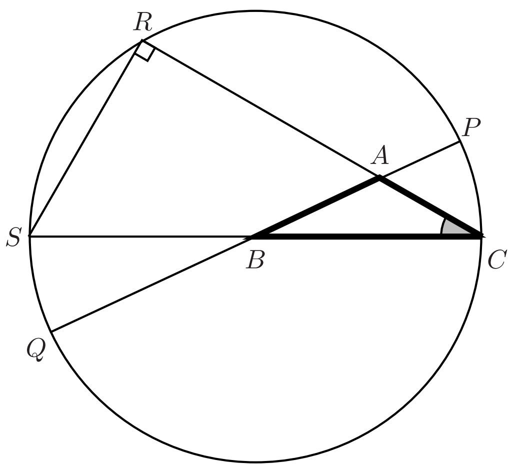
〔註〕如果依上述的方法考慮四邊形，五邊形，⋯，n 邊形（要求頂點是格子點），那麼會發現：面積公式都是

$$\frac{S}{2}+I-1,$$

即皮克面積公式與 n 邊形無關。

遊戲 43 解答

設符號如下圖所示：



(1)

$$\begin{aligned}
\overline{SC}&=2\overline{BC}=2a;\\
\overline{AC}&=b;\\
\overline{AR}&=\overline{CR}-\overline{AC}=\overline{SC}\cos C-b=2a\cos C-b;\\
\overline{AQ}&=\overline{AB}+\overline{BQ}=c+a=a+c;\\
\overline{AP}&=\overline{BP}-\overline{BA}=a-c.
\end{aligned}$$

(2) 根據圓的內冪性質，得 $\overline{AR}\cdot\overline{AC}=\overline{AP}\cdot\overline{AQ}$。代入 (1) 的值，得

$$(2a\cos C-b)\cdot b=(a-c)\cdot(a+c),$$

乘開移項，得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

〔玩鎖・玩索提示〕此種情形需用到圓的外冪性質，其餘與遊戲的作法雷同。 ⊠

遊戲 44 解答

(1) 在三角形 ABC 中，利用餘弦定理

$$\cos\theta=\frac{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}{2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}},$$

得

$$\cos\theta=\frac{15^2+8^2-17^2}{2\cdot 15\cdot 8}=0.$$

故 $\theta=90^\circ$。

(2) 當虎口張開的角度 $\theta=60^\circ$ 時，利用餘弦定理

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos\theta,$$

得

$$\overline{AB}^2=8^2+15^2-2\cdot 8\cdot 15\cdot\frac{1}{2}=169.$$

故 $\overline{AB}=\sqrt{169}=13$。

⊠

遊戲 45 解答

(1) 因為 $s=\frac{9+(x+7)+(x+14)}{2}=x+15$，所以由海龍公式得三角形面積

$$36=\sqrt{(x+15)((x+15)-9)((x+15)-(x+7))((x+15)-(x+14))}.$$

兩邊平方，得

$$36^2 = 8(x+15)(x+6) \Rightarrow x^2 + 21x - 72 = 0.$$

解得 $x = 3$ 或 -24（不合）。因此 $x = 3$。

(2) 由 (1) 知道三角形的三邊邊長為 $9, 10, 17$，令邊長 9 與 10 兩邊之夾角為 θ。利用面積公式

$$\frac{1}{2} 9 \cdot 10 \sin\theta = 36 \Rightarrow \sin\theta = \frac{4}{5}.$$

利用正弦定理，得

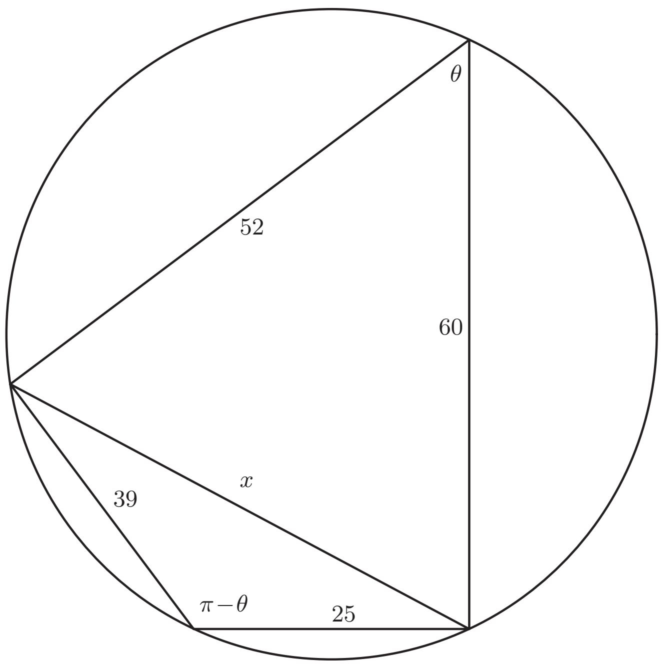
$$\frac{17}{\sin\theta} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{17}{\frac{4}{5}} = \frac{85}{4}.$$

故三角形的外接圓半徑為 $\frac{85}{4}$。

$\boxtimes$

遊戲 46 解答

如下圖所示，令一條對角線長 x，對應的圓周角分別為 θ 及 $\pi-\theta$：



(1) 對上、下兩個三角形分別利用餘弦定理，得

$$x^2 = 52^2 + 60^2 - 2 \cdot 52 \cdot 60 \cos\theta = 6304 - 6240 \cos\theta;$$
$$x^2 = 25^2 + 39^2 - 2 \cdot 25 \cdot 39 \cos(\pi - \theta) = 2146 + 1950 \cos\theta.$$

消去 x，解得 $\cos\theta = \frac{33}{65}$，再代回式子，得 $x = 56$。利用同樣的方法，得另一對角線長 65。

(2) 因為 $\cos\theta = \frac{33}{65}$，所以 $\sin\theta = \frac{56}{65}$，同理 $\sin(\pi - \theta) = \frac{56}{65}$。故圓內接四邊形的面積為

$$\frac{1}{2} \cdot 52 \cdot 60 \sin\theta + \frac{1}{2} \cdot 39 \cdot 25 \sin(\pi - \theta) = 1764.$$

遊戲 47 解答

(1) 根據直角三角形的三角函數定義，得

$$\tan\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{T_n}{2}}{1} \Rightarrow T_n = 2\tan\frac{\pi}{n} = 2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

與

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{S_n}{2}}{1} \Rightarrow S_n = 2\sin\frac{\pi}{n}.$$

(2) 由 $S_n = 2\sin\frac{\pi}{n}$ 得

$$\begin{aligned}
2 - \sqrt{4 - S_n^2} &= 2 - \sqrt{4 - 4\sin^2\frac{\pi}{n}} \\
&= 2 - 2\cos\frac{\pi}{n} \\
&= 2(1 - \cos\frac{\pi}{n}) \\
&= 4\sin^2\frac{\pi}{2n} \quad \text{（半角公式）} \\
&= S_{2n}^2.
\end{aligned}$$

(3) 由 $S_n = 2\sin\frac{\pi}{n}$ 及 $T_n = 2\tan\frac{\pi}{n}$ 得

$$\begin{aligned}
(4 - S_n^2)(4 + T_n^2) &= 16\left(1 - \sin^2\frac{\pi}{n}\right)\left(1 + \tan^2\frac{\pi}{n}\right) \\
&= 16\cos^2\frac{\pi}{n}\left(1 + \frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\right) \\
&= 16.
\end{aligned}$$

(4) 利用 (1) 得

$$\begin{aligned}
\frac{S_nT_n}{S_n+T_n} &= \frac{4\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}{2\sin\frac{\pi}{n}+2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{1+\cos\frac{\pi}{n}} \\
&= \frac{2\cdot 2\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}}{2\cos^2\frac{\pi}{2n}} \\
&= 2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}} \\
&= T_{2n}.
\end{aligned}$$

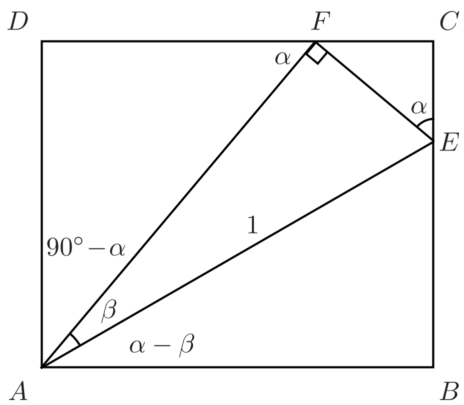
(5) 利用 (1) 得

$$\begin{aligned}
T_{2n}S_n &= 2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{n} \\
&= 2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}\cdot 4\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n} \\
&= 8\sin^2\frac{\pi}{2n} \\
&= 2S_{2n}^2.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

遊戲 48 解答

考慮下圖中的角度關係：



從上圖中，根據直角三角形的三角函數定義，得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \overline{BE}\\ &= \overline{BC}-\overline{EC}\\ &= \overline{AD}-\overline{EC}\\ &= \cos\beta\sin\alpha-\sin\beta\cos\alpha\\ &= \sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha,\end{aligned}$$

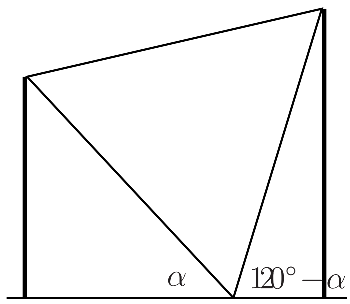
同理

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \overline{AB}\\ &= \overline{DF}+\overline{FC}\\ &= \cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha\\ &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

將同樣的方法套用到〔玩鎖・玩索〕的圖形中，可以得到欲證的另兩個等式。 ⊠

遊戲 49 解答

因為看板為正三角形，所以右邊竹竿的仰角為 $180^\circ-(\alpha+60^\circ)=120^\circ-\alpha$。因此，完整的角度如右圖所示。
又因為長竹竿的長度是兩截短竹竿的和，所以長竹竿的長度為

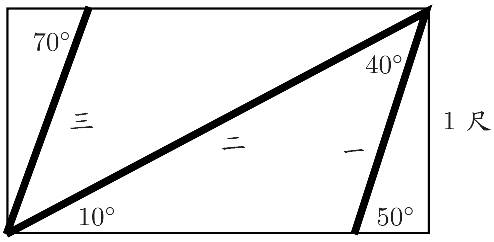


$$\begin{aligned}&10\sin\alpha+10\sin(120^\circ-\alpha)\\ &= 10\left(\sin\alpha+\sin(120^\circ-\alpha)\right)\\ &= 10\cdot2\sin\frac{\alpha+(120^\circ-\alpha)}{2}\cos\frac{\alpha-(120^\circ-\alpha)}{2}\\ &= 10\cdot2\sin60^\circ\cos(60^\circ-\alpha)\\ &= 10\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(60^\circ-\alpha)\\ &= 10\sqrt{3}\cos(\alpha-60^\circ).\end{aligned}$$

$\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 50 解答}}$

從下圖中得知，第一節的長度為 $\frac{1}{\sin 50^\circ} = \frac{1}{\cos 40^\circ}$，第二節的長度為 $\frac{1}{\sin 10^\circ} = \frac{1}{\cos 80^\circ}$，第三節的長度為 $\frac{1}{\sin 70^\circ} = \frac{1}{\cos 20^\circ}$。



霍師父的身高為

$$\frac{1}{\cos 40^\circ} + \frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ},$$

通分得

$$\frac{\cos 20^\circ \cos 80^\circ + \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}.$$

利用這道遊戲的提示 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$，得

$$\begin{aligned}
&4(2\cos 20^\circ \cos 80^\circ + 2\cos 20^\circ \cos 40^\circ - 2\cos 40^\circ \cos 80^\circ)\\
&\quad = 4(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ + \cos 60^\circ + \cos 20^\circ - \cos 120^\circ - \cos 40^\circ)\\
&\quad = 4\left(\frac{3}{2} + \cos 100^\circ + \cos 20^\circ - \cos 40^\circ\right)\\
&\quad = 4\left(\frac{3}{2} + 2\cos 60^\circ \cos 40^\circ - \cos 40^\circ\right)\\
&\quad = 6.
\end{aligned}$$

故霍師父的身高為 6 尺。 $\boxtimes$

$\boxed{\text{遊戲 51 解答}}$

令 $a_1 = 2\cos 20^\circ = \alpha$，利用三倍角公式 $\cos 60^\circ = \cos 3\cdot 20^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$，得

$$\frac{1}{2} = 4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

即

$$\alpha^3 = 3\alpha + 1.$$

因為 $a_1 = \alpha$ 且 $a_{n+1} = 2 - a_n^2\ (n \geq 1)$，所以 $a_2 = 2 - a_1^2 = 2 - \alpha^2$。又利用 $\alpha^3 = 3\alpha + 1$，得 $a_3 = 2 - a_2^2 = 2 - \left(2 - \alpha^2\right)^2 = -\alpha^4 + 4\alpha^2 - 2 = -\alpha(3\alpha + 1) + 4\alpha^2 - 2 = \alpha^2 - \alpha - 2$。再利用 $\alpha^3 = 3\alpha + 1$，得

$$\begin{aligned} a_4 &= 2 - a_3^2 \\ &= 2 - \left(\alpha^2 - \alpha - 2\right)^2 \\ &= -\alpha^4 + 2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4\alpha - 2 \\ &= -\alpha(3\alpha + 1) + 2(3\alpha + 1) + 3\alpha^2 - 4\alpha - 2 \\ &= \alpha \\ &= a_1. \end{aligned}$$

故初始值 $a_1 = 2\cos 20^\circ$ 的數列 $\langle a_n \rangle$ 每 3 項一循環，即週期為 3 的數列。 ☒

遊戲 52 解答

利用複數的極式及主輻角的概念，我們可以將圖中的 α, β 與 γ 分別想成複數 $3 + i, 6 + 2i$ 與 $7 + i$ 的主輻角，即

$$\begin{aligned} 3 + i &= \sqrt{10}(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ 6 + 2i &= 2\sqrt{10}(\cos\beta + i\sin\beta) \\ 7 + i &= 5\sqrt{2}(\cos\gamma + i\sin\gamma). \end{aligned}$$

將三個複數相乘，得到

$$(3 + i)(6 + 2i)(7 + i) = 100\sqrt{2}(\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

又

$$(3 + i)(6 + 2i)(7 + i) = 50 + 50i = 100\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ),$$

故 $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$。 ☒