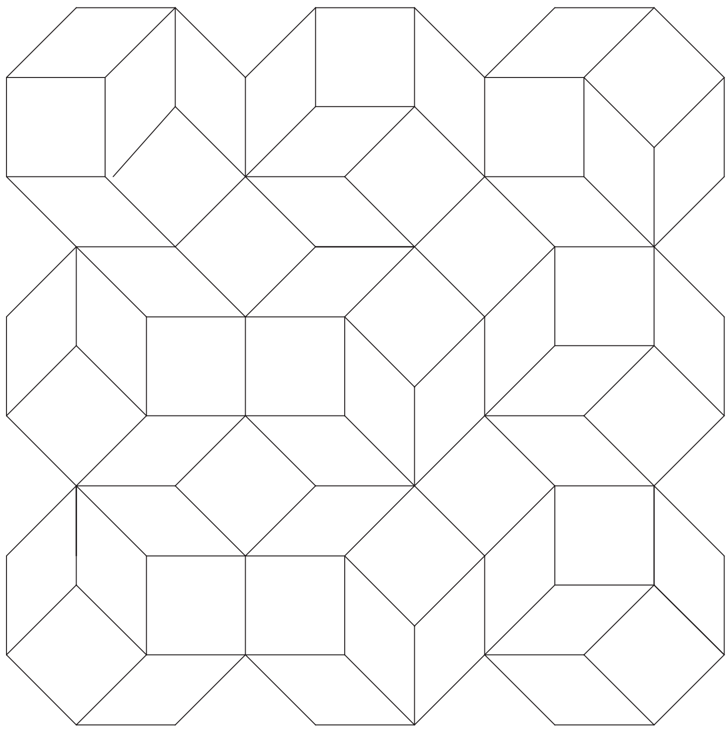
# 推理試題

許 志 農

國立台灣師範大學數學系

December 26, 2004



雜亂無章或井然有序呢？

目 錄

# 1　推理試題是什麼？有哪些題型？要考什麼？

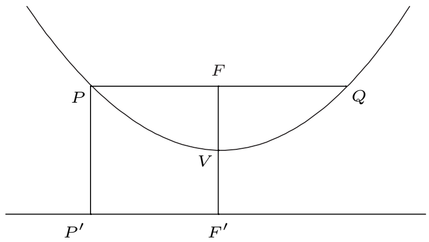
## 1.1　推理試題有哪些題型

推理試題的類型有：非引導式試題、引導式試題與偵錯題：

1. 非引導式試題：基本上是給出假設求證結論的傳統式證明題，任由考生用各種方式來答題。這類試題可以是用計算方法證明的計算式證明題、推理式證明題或這兩類的混合題。

   例題 **1 (推理式證明題)** 根據拋物線的準線及焦點定義，求證拋物線的正焦弦長是頂點到焦點距離的 4 倍。

   〔證明〕如下圖所示，$F$ 為拋物線的焦點，$PQ$ 是正焦弦，$V$ 是頂點，而 $P', F'$ 分別是 $P, F$ 在準線上的垂足。

   根據拋物線的定義：$FV = VF', PF = PP'$，故 $PF = PP' = FV + VF' = 2FV$；即

   $$PQ = PF + QF = 2PF = 4FV.$$

   也就是說，正焦弦長是頂點到焦點距離的 4 倍。 ☒

   例題 **2 (計算式證明題)** 證明三角恆等式

   $$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

〔證明〕利用 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$ 得到

$$\begin{aligned}\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} &= \frac{2\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}\\ &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}\\ &= 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\ &= \sin\theta,\end{aligned}$$

得證。 $\boxtimes$

**例題 3 (混合題)** 求證

$$f(x)=x(x-1)(x+1)+0.1=0$$

有三個實根。

〔證明〕因為

$$f(0.5)=0.5(-0.5)(1.5)+0.1=-\frac{3}{8}+0.1<0,$$
$$f(-0.5)=(-0.5)(-1.5)(0.5)+0.1=\frac{3}{8}+0.1>0,$$

所以由勘根定理可知在 $0.5$ 和 $-0.5$ 之間有一實根，又因 $f(1)=0.1>0, f(-2)=-2(-3)(-1)+0.1<0$，故 $1$ 和 $0.5$ 與 $-0.5$ 和 $-2$ 之間亦各有一實根，得證 $\boxtimes$

2. 引導式試題：將一完整證明的數個關鍵步驟由淺入深各自成一小題，部分小題也可以是選擇或填充類型試題。

**例題 4** 設 $P(x_0,y_0)$ 為橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上的一點，$O(0,0)$ 為原點。

(1) 證明：$\frac{|x_0|}{a}\leq 1$。

(2) 若令 $\frac{x_0}{a}=\cos\theta$ $(0\leq\theta<2\pi)$，則求 $y_0$（以 $b$ 及 $\theta$ 表示）。

(3) 證明：$a \geq PO \geq b$（即「長軸長 $\geq$ 過橢圓中心任意弦的弦長 $\geq$ 短軸長」）。

〔證明〕這是一則標準的引導式推理試題，引導你用參數坐標的方法證明：「長軸長 $\geq$ 過橢圓中心任意弦的弦長 $\geq$ 短軸長」。

(1) 因為 $\frac{x_0^2}{a^2} \leq \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$，所以 $\frac{|x_0|}{a} \leq 1$。

(2) 將 $x_0 = a\cos\theta$ 代入橢圓方程式，解得

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow y = \pm b\sin\theta.$$

(3) 先證 $a \geq PO$：利用 $a > b$ 得到

$$PO = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \leq \sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = a.$$

再證 $PO \geq b$：同樣利用 $a > b$ 得到

$$PO = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \geq \sqrt{b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} = b.$$

⊠

3. 偵錯題：對某一問題提出證明，過程中隱藏一些學生容易犯的錯誤，要求學生將過程中的錯誤找出並說明理由。

例題 **5** 一位同學將數學問題「已知 $a, b$ 是小餘 1 的實數，求證 $a + b - ab < 1$。」的證明過程寫成下列三個步驟：

(1) 因為 $a < 1, b < 1$，所以 $a + b < 2$。

(2) 因為 $0 < a < 1, 0 < b < 1$，所以 $ab < 1$。

(3) 將上述兩個不等式相減得到

$$(a + b) - ab < 2 - 1 = 1,$$

得證。

關於這位同學的作法，若無錯誤，則說「無誤」；若有錯誤之處，請說出第幾個步驟出錯，並寫出正確的作法。

〔證明〕該生在第 (3) 步驟出了問題，不等式僅能相加，不能相減。正確的作法：因為 $a<1, b<1$，所以 $1-a>0, 1-b>0$，故

$$1-a-b+ab=(1-a)(1-b)>0.$$

證得 $a+b-ab<1$。 ☒

### 1.2 推理題形成過程與示例

推理題形成過程有底下三個步驟：

(1) 選定測驗的目標：觀念、定理及計算工具（如測試學生是否學會利用「方向向量內積為零」作為證明「兩直線垂直」的計算工具）。

(2) 選擇相關的題材來展現要測驗的目標。

(3) 完成本題。

以下我們將就前一節所講之推理題類型分別給予示例。以下所給之示例均是從大考中心歷年有關推理題的研究報告中，挑出各類型中較有代表性的試題，作為示例。

1. 非引導式試題示例：

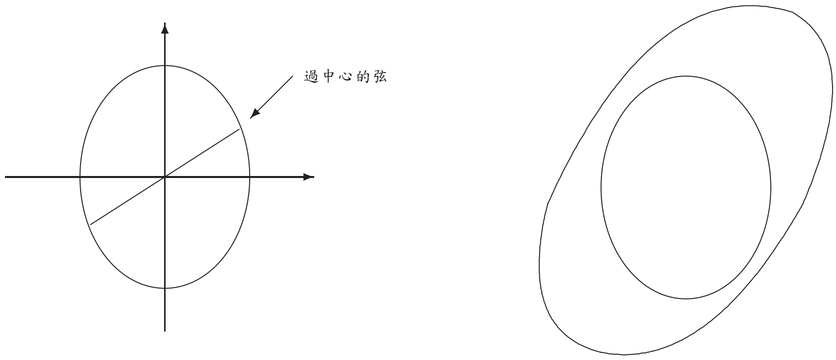
   示例 **1** 三角形 $ABC$ 三邊長 $a, b, c$，外接圓半徑為 $R$。假設 $a, b, c$ 均小於 $R$。證明三角形 $ABC$ 至少有一角大於 150 度。

   示例 **2** 設 $A, A'$ 都在直線 $BC$ 同側， 並且 $\angle A=\angle A'$。證明：$A, A', B, C$ 四點共圓。

   示例 1 與 示例 2 的測驗目標均為正弦定理，但卻是選擇不同的題材，示例一所選擇的題材是三角形與外接圓的相對關係，而示例二所選擇的題材是兩個三角形什麼時候會有相同的外接圓。

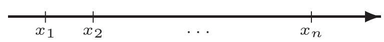
2. 引導式試題示例：

示例 **3** 如下圖，已知對任意橢圓，下列關係成立：
長軸長 $\geq$ 過橢圓中心任意弦的弦長 $\geq$ 短軸長。
如右圖，中心相同的大小二橢圓，假設小橢圓完全在大橢圓內部，求證：大橢圓的長軸 $>$ 小橢圓的長軸；大橢圓的短軸 $>$ 小橢圓的短軸。

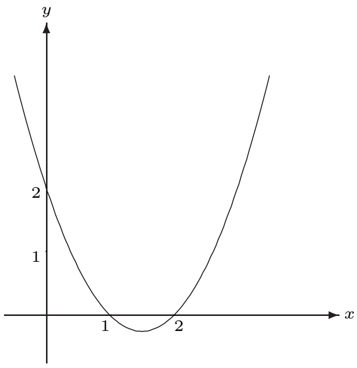



本題的測驗目標為是否能根據所提供的大小關係，利用遞移律來證明另一大小關係成立，題材是橢圓長短軸之間的關係。

示例 **4** 設 $f(x)$ 為一實係數多項式，若方程式 $f(x)=0$ 的所有實根為 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 且 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$（請注意虛根不計，重根只計一次）。在實數線上標示 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 後，將實數線分成 $n+1$ 個區間，如下圖所示：




$(a)$ 證明 $x$ 在同一個區間內（端點不計），$f(x)$ 必恆為正或是恆為負。
將各區間內 $f(x)$ 值的正、負以 $+$、$-$ 標記。並將這些 $+, -$ 號依區間所在位置由左到右依序排列，稱為函數 $f(x)$ 的正負排序。當 $f(x)=0$ 共有 $n$ 個相異實根時，它的正負排序由 $n+1$ 個 $+$、$-$ 號排成一串。以 $f(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ 為例：當 $x<1$ 時，$f(x)$ 為正；$1<x<2$ 時，$f(x)$ 為負；$x>2$ 時，$f(x)$ 為正。因此，$f(x)$ 的正負排序為 $+-+$。




$(b)$ 當 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$ 時，此函數的正負排序為何？

$(c)$ 當 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，$a,b,c,d$ 均為實數，指出下列那一個正負排序是不可能發生的，並解釋。

1. $++$
2. $+++$
3. $+-+$
4. $++++$
5. $+-+-+$

$(d)$ 若 $f(x)$ 是六次實係數多項式，且 $f(x)$ 的正負排序為 $++-++$，則請說明 $f(x)=0$ 有幾個實根（重根需重覆計算）。

本題的測驗目標為勘根定理、方程式的重根數與圖形的關係，選擇的題材是多項式函數的圖形。

引導式試題命題時，必須對解題的思路過程作分析，以作為適當的墊步題目。以此題為例，由於實係數多項式中兩個連續 $+$ 號或 $-$ 號表示此間的實根為偶數次重根，學生在解題時，可能會忽略此種情況，因此加入問題 $(b)$ 作為提示。

3. 偵錯題示例：

示例 **5** 已知實數 $x,y$ 滿足方程式 $5x^2+4y^2-10x=0$，求 $x^2+y^2$ 的最大值。
某人的解法如下：

1. 由已知 $5x^2+4y^2-10x=0$，得 $y^2=\frac{1}{4}(10x-5x^2)$。
2. 所以

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= x^2+\frac{1}{4}(10x-5x^2) \\
&= -\frac{1}{4}x^2+\frac{10}{4}x \\
&= -\frac{1}{4}\left(x^2-10x+25\right)+\frac{25}{4} \\
&= -\frac{1}{4}(x-5)^2+\frac{25}{4}.
\end{aligned}
$$

3. 故當 $x=5$ 時，$x^2+y^2$ 有最大值 $\frac{25}{4}$。

指出他的錯誤所在，並說明為什麼是錯的。

本題所選擇測驗目標為判斷推理過程中的合理性，題材是有範圍限制的極值問題。

## 2 推理試題的注意事項

### 甲、就測驗目標與題材而言：

就測驗目標與題材而言，有以下幾點要注意：

1. 要求學生證明某個命題，要讓學生覺得該命題合適，才可能知道如何下手。

   例題 **6** 設 $C, D$ 為兩個圓，$D$ 圓完全落在 $C$ 圓的內部，求證圓 $D$ 的半徑小於圓 $C$ 的半徑。

   學生可能覺得這個命題太直觀，不需要證明，而無法下手。

2. 要求學生證明某個命題時，該命題對學生而言應該要有某種意義。

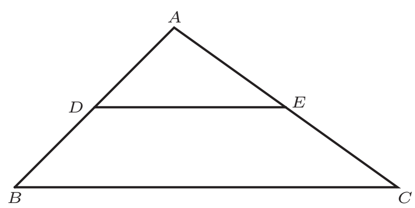
   例題 **7** 求證實係數矩陣

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} \geq 0.$$

   此題出自大學聯考，但這個命題對「非專家」來說，不具意義。

3. 避免出可以用下游的定理回證上游之證明。

   例題 **8** 如下圖，$D$ 是線段 $AB$ 的中點，$DE//BC$，求證 $E$ 也是線段 $AC$ 的中點。

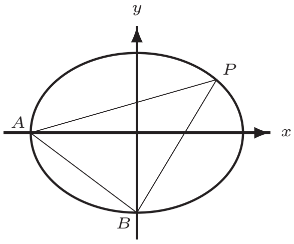



〔證明〕因為 $DE//BC$，所以 $AD : DB = AE : EC$，得證。
$\boxtimes$

被平行線所截的線段成比例，是下游的定理。因此上述的證明過程並不恰當。

4. 避免做不當的提示，以免產生「誤導」。若需要提供提示，則必須說明清楚，或將此題轉化為引導式試題。

例題 **9** 如下圖，$A, B$ 為橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之兩頂點，其中 $a, b$ 皆為正數。若 $P$ 為第一象限的橢圓弧上之一點，則三角形 $ABP$ 最大的面積為何？
（提示：過 $P$ 點的切線會與 $AB$ 平行）




〈八十八年自然組數學〉

這個提示不是很恰當，因為學生可能不理解為什麼 $\triangle ABP$ 面積最大時，會有平行的條件，並且求切線計算較繁，並不是較好的解法。

5. 出題的同時，應想到您的測驗對象是哪個程度的學生。

## 乙、就試題的文字敘述而言：

就試題的文字敘述而言，有以下幾點要注意：

1. 題目的假設要周全，而且對每一個在題目中第一次出現的符號應清楚說明所代表的意義。

   (1) 如 $f(x)$ 是一多項式，需標明 $f(x)$ 是整係數多項式或實係數多項式等。

   (2) 如 $a, b$，應標明正整數 $a, b$，⋯；$(x, y)$ 應說明清楚是座標、數對或是最大公因數，⋯。

2. .題目中所使用的符號，應注意是否與高中各版本的慣常用法相同。

   (3) 以 $\overline{PQ}$ 表示直線 $PQ$，應考慮是否所有學生都瞭解此符號；若不是，應特別標明。（有人以 $\overline{PQ}$ 表示線段 $PQ$；有人以它代表直線 $PQ$；甚至有人用它來代表線段 $PQ$ 的長度）

   (4) 象限一詞有無包括座標軸，錐線有無包括退化情形。

   (5) 橢圓有無排除圓。

3. 題目對考生的要求要清楚，部分配分多少應與該部分的難度相符。

   (6) 請選出正確的選項並解釋（十分），應改為

      a. 選出正確的選項（四分）

      b. 解釋你為何做此選擇（六分）

   尤其在對非引導式試題配分時，需考量對其不同做法，給予平行計分的原則。

4. 題目文字要通順、層次要分明。

   (7) 如果 $b^2-4ac>0$，則實係數多項式 $ax^2+bx+c=0$ 有兩相異實根。應改為設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 為一實係數方程式。如果 $b^2-4ac>0$，則此方程式有兩相異實根。

   尤其要注意在引導式試題的敘述過程中應該要由淺入深、先簡後繁。

## 丙、不同類型推理題應注意事項：

以上是對推理題命題時，所需注意的事項。但對推理題各類型而言，亦有依其不同之特性，有需加以注意之處。

1. 非引導式試題為例：由於非引導式試題有不同方式的解題方法，因此命題時，需避免學生從不當起點出發，或不知道如何下手。例如：求證畢氏定理，考生用餘弦定理（以 $\angle C=90^\circ$ 代入）或用座標求距離來證明。

2. 引導式試題：本題之前的墊步題目應為主要的解題關鍵，墊步題目應以簡單的操作為原則，不應給予計算過程太過繁複的題目。

3. 偵錯題：在試題中，應說明清楚，避免學生不找出錯誤，而以重新證明一次作為其解答；另外有些考生在回答偵錯題時，會認定不同的步驟為錯誤，因此命題時必須要求學生寫出其錯誤的理由為何。

根據前面所述，可得出一個結論，一個令人讚嘆的推理題是經過不斷的修改與討論，才能孕育而生。為了讓各位老師在命推理題時，能夠將以上的命題注意事項隨時浮現，故將以上所說之注意事項，整合寫成八句歌訣：

問題有意義、變化不求多
目標忌繁複、對象要區分
層次應分明、文字求通順
求證講清楚、配分需均勻

## 3 推理試題的發展方式與形成過程

根據前面所說推理題的定義，在命推理題時，先確定測驗目標後，再選擇適當的數學題材，發展出題目的雛形，再修成本題。以下我們將根據此種形式來命推理題。第一步，我們必須先確定測驗目標，測驗目標可以包含定理、觀念及計算工具等。但是我們要如何找出想測驗的目標呢？在這裡，我們提供兩個方法，一是從課本定理或是觀念出發，一是從歷年試題中挑出測驗目標，以下我們將從這兩方面討論推理題如何擬出新題。當然，老師亦可從其他方面去尋找測驗目標。

### 3.1 從課本定理或是觀念形成推理題

〔嘗試命題一〕

想法：應用輾轉相除法，餘式定理。命一題求最大公因數的推理試題。

題目雛形：第 $n$ 個費馬數定義為 $F_n = 2^{2^n}+1$。若正整數 $m$ 與 $n$ 不相同，則證明 $F_m$ 與 $F_n$ 互質。

〔證明〕為了方便起見，假設 $m<n$ 且令 $2^{2^m}=x$，則

$$F_m = x+1.$$

根據餘式定理：$F_m = x+1$ 除

$$F_n = \left(2^{2^m}\right)^{2^{n-m}}+1 = x^{2^{n-m}}+1 = f(x)$$

的餘式為

$$f(-1) = (-1)^{2^{n-m}}+1 = 2.$$

由輾轉相除法知道

$$(F_m, F_n) = (F_m, 2) = 1 \quad （因為 F_m 為奇數）.$$

因此 $F_m$ 與 $F_n$ 互質。 ⊠

擬修題建議：

此題所應用的數學符號太過繁複，對學生而言，可能造成困擾。因此我們可以將此題改為

建議一：已知 $x,a$ 為正偶數，求證 $x+1$ 和 $x^a+1$ 互質。亦可將 $a$ 改為數字，對學生而言，更容易解答。
建議二：已知 $x$ 為正偶數，求證 $x+1$ 和 $x^4+1$ 互質。
建議三：亦可將此題改為引導式試題：
請先閱讀 (1) 有關證明兩數互質的方法：

(1) 設 $x$ 為正偶數，證明 $x+1$ 和 $x^4+1$ 互質。
根據餘氏定理，$x+1$ 除 $x^4+1$，得餘式為 $(-1)^4+1=1+1=2$，再依據輾轉相除法，$x+1$ 與 $x^4+1$ 的公因數與 $x+1$ 跟 2 的公因數相同，即 $(x+1,x^4+1)=(x+1,2)$。因為 $x$ 為正偶數，所以 $x+1$ 為奇數，因此 $(x+1,2)$ 的公因數為 1。根據前述，$x+1$ 與 $x^4+1$ 的公因數與 $x+1$ 跟 2 的公因數相同，故 $(x+1,x^4+1)$ 的公因數亦為 1，所以兩者互質。

(2) 請你仿照 (1) 之證明，試證：若 $x,a$ 為正偶數，求證 $x+1$ 和 $x^a+1$ 互質。

〔嘗試命題二〕
想法：應用三角不等式，餘弦定理。命一題能連結此二概念的推理題。
題目雛形：設 $a,b,c$ 是三個正實數。試比較

$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{a^2+c^2-ac} \quad 與 \quad \sqrt{b^2+c^2+bc}$$

的大小關係，並問等號何時成立。
〔證明〕在平面上畫線段 $OA,OB,OC$ 使得

$$OA=a,OB=b,OC=c,\angle AOC=\angle BOC=\pi/3,\angle AOC=2\pi/3.$$

由餘弦定理得知：$AB,BC,CA$ 的長度分別為

$$\sqrt{a^2+b^2-ab},\sqrt{b^2+c^2-bc},\sqrt{a^2+c^2+ac}.$$

因為 $A,B,C$ 構成三角形，所以得到三角不等式

$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{a^2+c^2-ac}\geq\sqrt{b^2+c^2+bc}.$$

等號成立的充分必要條件為 $A,B,C$ 三點共線；即

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}.$$

⊠

擬修題建議：

此題所應用的數學符號太過繁複，對學生而言，可能造成困擾。因此我們可以將此題改為

建議一：建議可改為引導式試題

a. 已知邊長是 $a$ 與 $b$，但是夾角為 $60^\circ$ 或 $120^\circ$ 的對邊邊長為 $\sqrt{a^2+b^2-ab}$ 或 $\sqrt{a^2+b^2+ab}$。

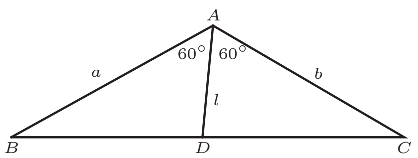
b. 原題。

建議二：用不同的夾角，但餘弦值為有理數。

建議三：用代數以外的方法（如向量），決定等號成立的充要條件。

建議四： 請先閱讀 (1) 有關求分角線長度的作法：

(1) 如下圖所示：




$$\triangle ABD = \frac{1}{2}al\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}al;$$
$$\triangle ACD = \frac{1}{2}bl\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}bl;$$
$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}ab.$$

由前兩式相加等於第三式得到 $(a+b)l = ab$，即 $l = \frac{ab}{a+b}$。

(2) 請你仿照 (1) 求 $\angle A = 60^\circ$ 的分角線的長度（以 $a, b$ 表示）。

〔嘗試命題三〕

想法：應用因數與多項式 $(x-a)|(f(x)-f(a))$ 的性質。

題目雛形：歷史學家為了推敲大數學家歐基里得的出生年份，發現在西元前 336 年時，流傳著一則很有趣的故事：那年的某一天，

歐基里得造了一個整係數多項式，並興高采烈的跟旁邊的人說「我現在的年紀剛好是這個多項式方程式的一個根」。旁邊的人為了想知道歐基里得的歲數，於是將 7 及一個比 7 大的整數代入歐基里得的多項式，結果得到 77 與 85 的值。這時歐基里得笑著說”我的年紀有你代的數那麼小嗎”。你能根據這些對話推得歐基里得出生的年份嗎？

〔證明〕假設歐基里得造的多項式為 $f(x)$ 及那時的年紀為 $a$ 歲，並設旁邊的人所代入較大的數為 $L$。根據題意我們有

$$\begin{cases} f(7)=77 \\ f(L)=85 \\ f(a)=0 \\ 7<L<a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-7)\mid 77 \\ (L-7)\mid 8=85-77 \\ (a-L)\mid 85 \\ 7<L<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=8,14,18,84 \\ L=8,9,11,15 \\ (a-L)\mid 85 \\ 7<L<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=14, \\ L=9. \end{cases}$$

因此當時歐基里得的年紀為 14 歲，所以他出生於西元前 350 年。

$\boxtimes$

擬修題建議：

建議一：墊兩個小題在原題之前

1. 假設 $f(x)$ 為一個多項式且 $a$ 為任意數。試證：$(x-a)$ 必為 $f(a)-f(b)$ 的因式
2. 假設 $f(x)$ 為一個多項式，$a>2$ 且 $f(a)=10, f(2)=3$，試證：$a=3$ 或 $9$。
3. 原題。

建議二：設 $P(x)$ 為整係數多項式且 $P(3)=-20, P(100)=174$。已知 $P(x)=0$ 在 3 與 100 之間有一整數解，試問此整數解為何？

〔解答〕設 $a$ 為介於 3 與 100 之間的整數解，利用 $(x-a)|(P(x)-P(a))$，得到

$$\begin{cases}(a-3)|20\\(100-a)|174\end{cases} \quad \Rightarrow a=13.$$

### 3.2 從歷年試題修成推理題

〔嘗試命題四〕

將連接 $(1,0,0)$ 與 $(0.0.1)$ 兩點的直線，繞 $z$-軸旋轉而得一直圓錐面，則此直圓錐面與平面 $x=2$ 相交而得的圖形為一

(A) 直線　(B) 圓　(C) 橢圓　(D) 拋物線　(E) 雙曲線

出自：八十八年學科能力測驗。

難易度：$P=28\%$。

鑑別度：$D=0.43$。

擬新題建議：

建議一：有一圓錐及球，其圓錐頂點及球心均在原點，則球面與圓錐交出一條曲線，試證此曲線為圓。

建議二：

a. 橢圓同心且交於四點，試證此四點所交出的圖形為平行四邊形。

b. 設一橢圓及圓同心且交於四點，試證此四點所交出的圖形為長方形。

建議三：已知橢圓的所有平行弦的中點會共線且橢圓的圖形對稱於其長軸及短軸。試利用尺規作圖將橢圓的焦點作出來，並說明作出來的理由。

〔嘗試命題五〕

已知從點 $(1,2,2)$ 到球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所作所有切線的切點都會在同一平面上，則此平面之方程式為 ________

出自：八十九年聯考自然組。

擬新題建議：

建議一：在坐標平面上，從點 $(2,0)$ 對圓 $x^2+y^2=1$ 作切線，求其切點的 $x$ 坐標。

建議二：證明：過球外一點 $P$ 所作的所有切線的切點都會共面。
〔嘗試命題六〕
設 $a$ 為一非零實數，試問方程式 $x^3+x^2-x+a$ 的根可能的情形為何？

$(A)$ 有三個負根。

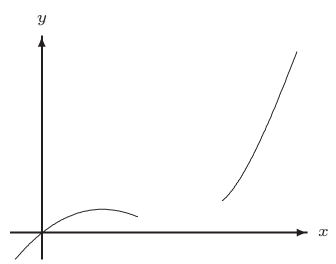
$(B)$ 有兩個負根和一個正根。

$(C)$ 有一個負根和兩個正根。

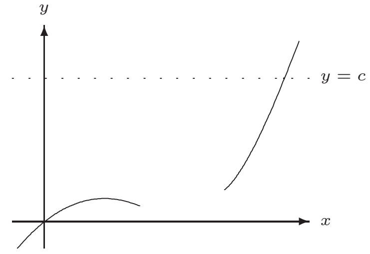
$(D)$ 有三個正根。

$(E)$ 僅有一個實根。

出自：八十九年聯考自然組。
難易度：$P=49\%$。
鑑別度：$D=0.48$。
擬新題建議：設 $a,b$ 為實數，觀察三次多項式 $y=x^3+ax^2+bx$ 的圖形，則當 $x$ 是很大的正數時，$x^3$ 的影響力遠超過 $ax^2$ 和 $bx$，因此可以判斷當 $x$ 往右邊走的時候，圖形會往上走並且沒有上界。如下圖所示：




又因為圖形一定過原點，因此取 $c>0$，則 $x^3+ax^2+bx=c$ 至少有一個實根，如下圖所示：



妨此，證明

(1) 設 $a, b, c$ 為實數，且實數 $d > 0$。證明：方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = d$$

至少有兩個實根。

(2) 設實數 $d > 0$。證明：方程式

$$x^4 + x^2 = d$$

恰好有兩個實根。

### 3.3 推理題實作

這裡提供了有關圓錐曲線，函數與空間向量三個單元的一些題目，請各位將他們修成推理題。

圓錐曲線：

1. 將連接 $(1,0,0)$ 與 $(0,0,1)$ 兩點的直線，繞 $z$-軸旋轉而得一直圓錐面，則此直圓錐面與平面 $x = 2$ 相交而得的圖形為一
   (A) 直線　(B) 圓　(C) 橢圓　(D) 拋物線　(E)雙曲線

   〈 88 自然組 ,$P = 28\%, D = 43\%$ 〉

2. 設 $P$ 為拋物線 $\Gamma : y = x^2$ 上之一點，其橫坐標為 $a$，且 $a > 0$。又設 $L$ 為過 $P$ 點之切線，求由 $\Gamma, L$ 及$x$-軸所圍成區域之面積。〈 86 自然組 〉

3. 今有兩圓 $x^2+y^2-2x-4y-95 = 0$ 及 $x^2+y^2-8x-12y+48 = 0$，則此兩圓的圓心距離為
   （A） 0　（B） 2　（C） 3　（D） 5　（E） 8

   〈 85 自然組，$P = 96\%, D = 12\%$ 〉

4. 在空間中，連接點 $P(2,1,3)$ 與點 $Q(4,5,5)$ 的線段 $PQ$ 之垂直平分面為 ________。

   〈 88 學科，$P = 48\%, D = 80\%$ 〉

5. 關於方程式

$$\left|\frac{3x+y-19}{\sqrt{10}}\right| = \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$

所代表的錐線圖形 $\Gamma$，下列何者為真？

(1) $\Gamma$ 為拋物線。

(2) $(1,-2)$ 為 $\Gamma$ 的焦點。

(3) $3x+y-19=0$ 為 $\Gamma$ 的漸近線。

(4) $x-3y+7=0$ 為 $\Gamma$ 的對稱軸。

(5) $(3,1)$ 為 $\Gamma$ 的頂點。

〈86 學科，$P=37\%, D=44\%$〉

6. 圓心在原點的兩個同心圓，面積分別為 $75\pi$ 和 $27\pi$。設 $P$ 點在第一象限。若 $P$ 點到大圓、小圓、$x$-軸的距離均相等，則 $P$ 點的坐標為 ____________。

〈85 學科，$P=18\%, D=45\%$〉

函數：

1. 設實係數二次方程式 $x^2+x+c=0$ 的兩根 $a,b$ 都不是實數，而且 $\frac{1}{a},\frac{1}{b}$ 也正是此方程式的兩根，則 $a^2+b^2$ 的數值為 ____________。

〈89 社會組〉

2. 關於多項式 $f(x)=x^4-15$，下列選項何者為真？

$(A)$ $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間有一實根。

$(B)$ $f(x)=0$ 在 $-2$ 與 $-1$ 之間有一實根。

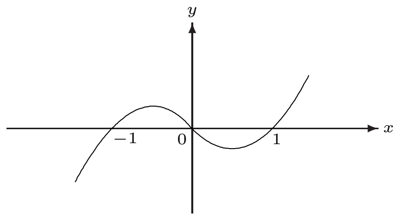
$(C)$ $f(x)=0$ 沒有大於 2 的實根。

$(D)$ $f(x)=0$ 沒有小於 $-2$ 的實根。

$(E)$ $f(x)=0$ 有四個實根。

〈89 社會組，$P=54\%, D=67\%$〉

3. 已知 $y=x(x-1)(x+1)$ 之圖形如下圖所示。




今考慮 $f(x)=x(x-1)(x+1)+0.01$，則方程式 $f(x)=0$

$(A)$ 有三個實根。

$(B)$ 當 $x<-1$ 時，恰有一實根（有一實根且僅有一實根）。

$(C)$ 當 $-1<x<0$ 時，恰有一實根。

$(D)$ 當 $0<x<1$ 時，恰有一實根。

$(E)$ 當 $1<x$ 時，恰有一實根。

〈88 自然組，$P=50\%, D=80\%$〉

空間向量：

1. 已知從點 $(11,2,3)$ 到球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所作所有切線的切點都會在同一平面上，則此平面之方程式為 ＿＿＿＿＿＿。

〈89 自然組〉

2. 空間中四平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 圍成一四面體，則此四面體之內切圓球的半徑為 ＿＿＿＿＿＿。（答案只有一個；寫出兩個的不予計分）

〈87 自然組〉

3. 設 $A, B, C$ 為空間中相異的三點，且不在同一直線上。在空間中另取一點 $D$，使得 $A, B, C.D$ 成為一平行四邊形的四個頂點，則這樣的 $D$ 點一共有多少個？

〈86 自然組，$P=71\%, 35\%$〉

4. 在空間中，連接點 $P(2,1,3)$ 與點 $Q(4,5,5)$ 的線段 $PQ$ 之垂直平分面為 ＿＿＿＿＿＿。

〈88 學科，$P=48\%, D=80\%$〉

5. 已知直線 $L_1, L_2$ 交於 $(1,0,-1)$，且相互垂直，其中

$$L_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \quad t \text{ 為實數；} \quad L_2 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1-t \end{cases} \quad t \text{ 為實數。}$$

若以 $L_1$ 為軸將 $L_2$ 旋轉一圈得一平面，則此平面的方程式為何？

〈85 學科，$P = 53\%, D = 43\%$〉

## 4 更多的推理試題示例與實作

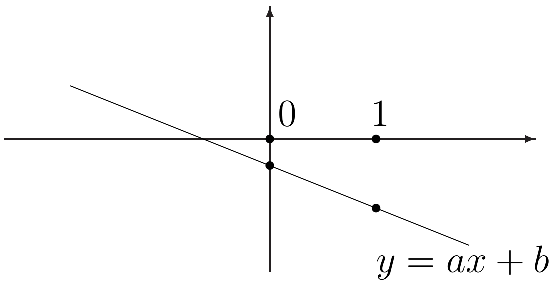
### 4.1 不等式示例

甲、從一則不等式問題談起

談到直線，大家都知道，它可用如下的方程式

$$y = f(x) = ax + b$$

來表示。由直線的特性，我們也清楚：如果 $f(0) < 0, f(1) < 0$，則觀察下圖馬上知道，對所有介於 0 與 1 之間的實數 $x$ 恆有 $f(x) < 0$。




下面是一則有關此直線知識的活用問題。

範例 **1** 設 $p, q, r$ 是三個滿足

$$0 < p, q, r < 1$$

的實數。證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

〔證明〕關於這個不等式，我們提出如下的四種解題思維：
【代數-幾何思維】令直線方程式為 $y = f(x) = (p + q - 2pq)x + pq - 1$（將 $p, q$ 視為固定的實數）。將 $x = 0, 1$ 代入，得到

$$f(0) = pq - 1 < 0; \quad f(1) = p + q - pq - 1 = -(p - 1)(q - 1) < 0,$$

所以此直線在 $[0, 1]$ 區間的值恆為負數，因此

$$f(r) = pq + qr + rp - 2pqr - 1 < 0.$$

得證。

【不等式思維】

$$\begin{aligned}1-(pq+qr+rp-2pqr) \\ &= (1-pq-r+pqr)+r(-q-p+pq+1) \\ &= (1-pq)(1-r)+r(1-p)(1-q)>0.\end{aligned}$$

【幾何模型思維】將原來不等式重新詮釋如下：

$$p\cdot q\cdot 1+1\cdot q\cdot r+p\cdot 1\cdot r-2p\cdot q\cdot r<1\cdot 1\cdot 1.$$

幾何模型解釋如下：將

$1\cdot 1\cdot 1$ 視為 $X,Y,Z$ 軸正向上各取 1 單位所成正立方體的體積；

$p\cdot q\cdot 1$ 代表 $X,Y,Z$ 軸正向上各取 $p,q,1$ 單位之長方體的體積；

$1\cdot q\cdot r$ 代表 $X,Y,Z$ 軸正向上各取 $1,q,r$ 單位之長方體的體積；

$p\cdot 1\cdot r$ 代表 $X,Y,Z$ 軸正向上各取 $p,1,r$ 單位之長方體的體積；

$p\cdot q\cdot r$ 代表 $X,Y,Z$ 軸正向上各取 $p,q,r$ 單位之長方體的體積。

你是否感受到這種幾何模型思維的功力了。

【推廣、提出猜想】本題目是一則三維度的不等式（因為含有 $p,q,r$ 三個未知數）。照理說，每個維度都應有對應的不等式存在才是，所以我們提出最一般化的猜想如下：設實數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 滿足

$$0<a_1,a_2,\cdots,a_n<1.$$

試證明：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i}\right)-(n-1)a_1a_2\cdots a_n<1.$$

讀者應該容易利用數學歸納法證明這個猜想吧！ ⊠

## 乙、數學推理題的命題形式探索

現在我們從甲節中的不等式問題出發，設計出如下四種不同形式的推理試題：

偵錯題 **1** 底下是有關命題

$$\text{"若 } 0 < p, q, r < 1\text{，則 } pq + qr + pr - 2pqr < 1\text{。"}$$

的證明。

(1) 由 $0 < p, q, r < 1$ 得到

$$0 < pq < 1, \quad 0 < qr < 1, \quad 0 < pr < 1.$$

(2) 由 (1) 得到

$$pq + qr + pr < 3.$$

(3) 由 $0 < p, q, r < 1$ 得到 $0 < pqr < 1$，因此有

$$2pqr < 2.$$

(4) 利用 (2) − (3) 得到

$$pq + qr + pr - 2pqr < 3 - 2 = 1,$$

得證。

針對這個證明，試選出正確選項：

$(A)$ 證明 (1) 犯了錯誤。

$(B)$ 證明 (2) 犯了錯誤。

$(C)$ 證明 (3) 犯了錯誤。

$(D)$ 證明 (4) 犯了錯誤。

$(E)$ 證明完全正確，沒有錯誤。

引導題 **1** 試證明：

(1) 設 $0 < a, b < 1$。試證明

$$a + b - ab < 1.$$

(2) 設 $0 < p, q, r < 1$。試證明

$$pq + qr + pr - 2pqr < 1.$$

〔證明〕

(1) 由 $a<1, b<1$ 及

$$\begin{aligned} a+b-ab-1 &= -(ab-a-b+1) \\ &= -(a-1)(b-1) \\ &< 0 \end{aligned}$$

得證。

(2)

由

$pq+qr+pr-2pqr = pq+r(p+q-pq)-pqr$

利用 (1) 取 $a=p, b=q$ 得

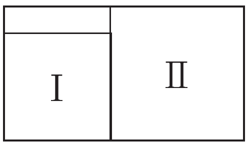
$$< pq+r-pqr$$

再利用 (1) 取 $a=pq, b=r$ 得

$$< 1$$

得證。 ☒

引導題 **2** 如下圖，正方形 I（邊長為 $a$）與正方形 II（邊長為 $b$）的面積和為 1。




$(a)$ 若令 $a=\cos\theta(0^\circ<\theta<90^\circ)$，則將 $b$ 以 $\theta$ 來表示。

$(b)$ 將剛好包住正方形 I 與 II 的矩形之面積以 $\theta$ 來表示。

$(c)$ 證明：剛好包住正方形 I 與 II 的矩形之面積

$$\le \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

〔證明〕

(a) 因為 $a^2+b^2=1$，所以 $\cos^2\theta+b^2=1$。因此 $b^2=\sin^2\theta$，即 $b=\sin\theta$。

(b) 由矩形面積公式得到：剛好包住正方形 I 與 II 的矩形之面積為

$$(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta=\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta.$$

(c) 由 (b) 知道：剛好包住正方形 I 與 II 的矩形之面積為

$$\begin{aligned}\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{2}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}\sin(2\theta+\pi/4)}{2}\\ &\le \frac{1+\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

$\boxtimes$

引導題 **3** 已知 $0<a,b<1$。我們想利用直線的知識來證明不等式

$$a+b-ab<1$$

成立。首先設直線方程式為 $y=f(x)=(1-a)x+a-1$。因為

$$f(0)=a-1<0,\quad f(1)=(1-a)+a-1=0,$$

所以當 $x=b$ 時，$f(b)<0$，即

$$a+b-ab-1=(1-a)b+a-1<0,$$

得證。有了這個經驗之後，你是否會證明：
當 $0<p,q,r<1$ 時，不等式

$$pq+qr+pr-2pqr<1$$

成立。

〔證明〕利用試題 1 中的第一種證明即可。 $\boxtimes$

非引導題 **1** 設 $0 < p, q, r < 1$。試證明

$$pq + qr + pr - 2pqr < 1.$$

〔證明〕如試題 1 的證明所給的，一共有四種不同的證明方法：

(1) 利用直線的知識連結到此問題。作法：將三個變數中的兩個已知化（固定），只剩下一個變數在動，即直線的知識範圍。

(2) 直接使用分堆伎倆。作法：分堆湊出不等式。

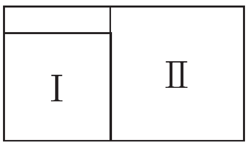
(3) 將不等式轉換成幾何量。作法：利用幾何模型來詮釋不等式。

(4) 利用數學歸納法來證明。作法：將問題看成 $n = 3$ 的例子，利用 $n = 2$ 的不等式，來推 $n = 3$ 的情形。（這裡的 $n$ 是變數的個數）

$\boxtimes$

非引導題 **2** 如下圖，正方形 I（邊長為 $a$）與正方形 II（邊長為 $b$）的面積和為 1。試證明：剛好包住正方形 I 與 II 的矩形之面積

$$\leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$




〔證明〕除了前述所引導的證明方法之外，這裡我們再提供另一種證明方法：令 $A = a + b, B = b$，因為 $a^2 + b^2 = 1$，所以 $(A - B)^2 + B^2 = 1$，即

$$A^2 + 2B^2 = 1 + 2AB.$$

所求矩形的面積為 $(a + b)b = AB$。利用上述等式得到

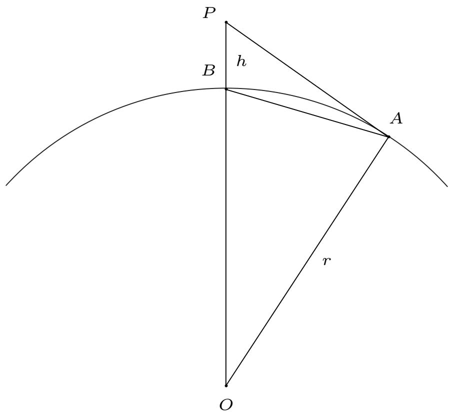
$$\begin{aligned}
A^2 + 2B^2 = 1 + 2AB \Rightarrow 2\sqrt{2}AB \leq A^2 + 2B^2 &= 1 + 2AB \\
\Rightarrow 2(\sqrt{2} - 1)AB &\leq 1 \\
\Rightarrow AB &\leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

## 4.2 畢氏定理示例

俗語說：「登高必自卑，行遠必自爾」。站在高 $h$ 公尺的小山上，所能眺望的最遠距離是多少呢？又海盜船航行在茫茫大海中，若船桅頂端離海面 $h$ 公尺，那麼攀爬到船桅頂端，所能看見的圓形區域之半徑是多少呢？究竟這兩則問題牽涉到哪些數學知識呢？你有何辦法將這樣的數學問題設計成引導式推理題，讓學生推得答案嗎？

引導題 **4** 如下圖所示，$P$ 是一高度為 $h$ 公尺的小山山頂， $B$ 是 $P$ 在平地上的投影點（即 $B$ 在地球的球表面上，且在 $P$ 與地心 $O$ 的線段上），而站在 $P$ 點遠望，所能看到最遠的點為 $A$。




(1) 若地球的半徑為 $r$ 公里，則求 $P, A$ 兩點的距離（以 $r, h$ 表示）。

(2) 在 $P$ 點所能看到的最遠距離，習慣上是指 $AB$ 的弧長。由於弧長不好算，經常用線段 $AB$ 的長度來當作 $AB$ 的弧長（其實兩者誤差不大），又 $h$ 比地球的半徑 $r$ 小很多，所以 $\angle ABP$ 近似於直角。若取地球半徑 $r = 6400$ 公里，則 站在高度 $h$ 公尺的 $P$ 點，所能看到的最遠距離約為

$$8\sqrt{\frac{h}{5}}$$

公里。

〔證明〕這是畢氏定理的應用問題：

(1) 因為 $A$ 是最遠的點，所以 $PA$ 與地球的球面相切；即三角形 $PAO$ 是直角三角形，由畢氏定理得到

$$PO^2 = PA^2 + AO^2 \Rightarrow (r + 0.001h)^2 = PA^2 + r^2.$$

解得

$$PA = \sqrt{0.002rh + 0.001^2h^2}.$$

(2) 因能看到的最遠距離 $AB$ 的弧長近似於線段 $AB$，且三角形 $APB$ 近似直角三角形，所以由畢氏定理得到

$$PA^2 = AB^2 + PB^2 \Rightarrow 0.002rh + 0.001^2h^2 = AB^2 + (0.001h)^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{0.002 \times 6400h} = 8\sqrt{\frac{h}{5}}\text{（公里）}.$$

## 5 有關推理試題的演講資料

### 甲、說明推理題的特色

蕭處長次融:

中心平常的研究計畫就是找高中老師，大學教授來談一談怎麼樣命題，怎麼樣研究那個教材、課程諸如此類的，希望是能夠將討論所得新點子寫下來，提供命題委員做參考。類似這樣的工作，我們已經持續做了很多年了。

從九十一年開始，各位都知道是有多元入學新方案要實施了，實施的時候呢，我們就有兩段考試，學科能力測驗，大家都比較了解了。那指定科目考試，大概會在七月舉辦，就是會替代目前的那個聯招，而對九十一年度的這些學生呢？不僅面對新教材，也面臨審定本跟部定本的衝擊，即一綱多本的實施，因此在命題方面，有很多的思考空間，看怎麼樣做，能夠對於高中教學呢，有一個良好的影響。在座的林福來教授，他是我們考試中心的學科顧問，數學科的顧問。中心在數學、英文、國文三個是比較能力型的考科，特別聘請學科顧問。學科顧問是幫我們來規劃該科的命題研究。不過，今年數學科很特別，他說關於命題理念，高中是怎麼樣一種反應？如果沒有溝通好的話，恐怕新的題型或命題理念不容易被接受。所以林福來教授就幫我們在數學科作整體的規劃，數學科今年是以一主計畫包含五個子計畫進行整合性研究，其中一個就是這工作坊。

「工作坊」顧名思義就是找的是高中老師跟大學教授，主要目的在於讓參與老師對新題型能有所共識。那我們已經辦過一次關於概念題的研習，第一梯次的反映很熱烈，本來只能四十二個人參加，結果報名人數太多，後來又補辦了一場，才能夠符合高中老師的需求，我也聽到參與老師的反應是很不錯啦！今天，我想會更精采，因為林教授一路走過來，沿途一直告訴我，一定精采！一定精采！那曹顧問一進來，看到題目就說：這題目很有意思。他們兩位教授已經在自我欣賞了。那我相信各位一定不會失望。簡單致詞到此，謝謝。

林教授福來:

謝謝蕭處長。大學聯考的命題，在這個社會上，我想是台灣少數幾件事情還被社會感覺有信用的。就是說，大概在整個社會裡面，像聯考的命題，我想有它的公信力在。但是，我們想說利用整個考試制度要改變的這個機會，大考中心這邊做了很多相關的研究，以前只有聯考試題，未來考試有學科能力測驗及指定科目考試，當然在過渡期間，指定考科與現今的聯考有部分的雷同，所以它扮演的角色有一點不太一樣。那麼聯考的一份考題，將來會發展成學科能力測驗及指定科目考試，分別的兩份考題，我想中間當然有很多的改變、想法，及實際運作時需要互相溝通的地方，所以，我想工作坊就從這個角度切進來，我們希望所有的老師都知道，聯考考題設計是走怎麼樣的方向，這樣你就可以很放心帶你的學生，在高中階段好好度過他的黃金歲月。我們感覺很遺憾就是很多人在年輕那一階段好像都只有考試，最後回憶感覺是夢魘，我們希望考試能夠開放一點，讓大家對這些事情有點信心，知道怎麼樣做或準備就可以了，並不必說每天晚上一定要去補習或去幹什麼，才能夠應付考試。

所以我想透過這個工作坊，慢慢地，我們可以把這些想法好好溝通，這個工作坊結束後，我們這兩天的成果，會放到網路上，這個計劃另外附屬一個計劃，為網路的命題競賽，那麼，你自己當然是最好的網路競賽的命題者。第一階段，我們做了數學概念題的實作，也做了數學概念題的競賽，今天我們所研究討論的是做數學推理題，歡迎你，除了在這兩天裡實作之外，回去以後，歡迎上大考中心那個數學科網路競賽的網站參與命題競賽，這是在這裡補充說明的部分。剛剛蕭處長說，我在走到這個房間之前，講到說一定精采，是指底下要報告的人是張海潮教授。我是說對他的報告感到充分十分的有信心，所以一定精采，曹亮吉講的什麼，我沒有聽到，你自己補充。

曹教授亮吉:

我的身分在這裡是工作坊的主持人，所以在林教授下面，舉辦工

作坊。考試中心好幾年來，對於數學的命題，做一些研究，也有一些新的題型或想法，譬如說，比較是情境的或是概念的，在學科能力測驗已經漸漸出現了。未來九十一學年度呢？我們就是把過去的研究做一些整理，想讓它比較有系統。另外一個呢，就是想把這樣的想法跟高中老師溝通，讓高中老師也可以回饋你們的想法，然後另外一方面，如果你能夠看懂我們在幹什麼，你們也比較放心一點啊！所以才有這樣的一個工作坊的產生。不過，我們為了讓各個學校都有機會啊，所以我們分批的時候，原則上是一個人不能再參加第二次，這也是很遺憾的事情。因為數學老師實在是很多，很多人都有興趣。不過呢，大概你們來一場，就會感覺那味道，說我們在幹什麼，我們希望也能夠讓你們掌握這一些訊息。

有一點要先說明，你也許在這個場合，可以看到很多比較新鮮的題目，千萬不要認為說那九十一年的考試，這些新鮮類型的題全部考出來，不會的，它還是要承續過去的，會變的話可能是少數在變而已，不會一下子全部是你認為是新的部分。

今天的這個節目主要關於推理題的討論，前面我們是從一個理念到如何命題，有兩位教授來說明，中間就是茶敘，茶敘以後，我們有一個插花，多元入學介紹，主要是因為大家在談的過程中，不免會觸及到九十一年開始的多元入學方案。有的人很清楚，也許有的人對有些事情還有一點疑問，所以我們就有這麼一個介紹。再下去呢，就是實作，先聽完理論就自己去做，那是一場，然後在晚上回來的時候，我們會有人去講一下他的經驗，那個人就是我。那剛剛我就決定要講那一題，我說這一題是很精彩，一開始是把我考倒了，後來我漸漸可以把握到底在幹什麼，覺得很有意思，而且這個題目的內容，有一地方印錯了，怎麼樣從錯的看出對來，我覺得很有意思啊，等一下我會專門談這個部分，再來還是回到各位分組來實作，今天最後一場有試題評析，就是各組要把自己的成果呈現出來，給大家欣賞。明天繼續再做，然後一樣有評析，大概是一個這樣過程，所以有一半以上，要靠各位老師自己來做，有時候我們會發現比我們做的還精彩，就是我們希望的互相交流。我現在要特別介紹一下，就是研究發展處二位數學

科的研究人員，對於這整個規劃研究事宜是主角啦！那邊是吳家怡研究員，還有朱惠文研究員，有一些其他方面的問題，你們都可以跟他們請教。在這個會議過程中，當然也可以找我們，不過就是說他們對於某些細節，更是清楚。好，我就講到這裡，我們交給主席。

林教授福來:

好，謝謝曹教授。現在我們是不是就請一定精彩的張海潮教授，來談推理題的特色。

張教授海潮：

各位老師午安。剛剛聽了主持人的介紹以後，真是百感交集啊！因為其實每一次來跟各位談怎麼樣出題，最主要的是一個經驗上的分享，所以我所謂百感交集是說有的時候很難有一個讓自己或讓各位覺得很滿意的開頭，就是說到底開始的時候，要跟各位講一些什麼，剛剛想了一下，覺得有一個經驗應該先跟各位報告。我個人是從 82 年到 85 年這三年，是在這個台大數學系當系主任，因為當系主任的關係呢，所以需要去參加聯考的閱卷，並且當這個主持人。我在這三年閱卷的時候，就發生了一件事情。就是有一題證明題，題目要求請用數學歸納法證明棣美弗定理。當時這個題目是這樣子寫。是利用數學歸納法證明棣美弗定理：

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

其中 $r$ 為正數，$n$ 為正整數，但是在閱卷過程中，有考生根據課本的證明過程，設 $E = r(\cos\theta + i\sin\theta)$， $E^2 = E\cdot E = r(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$，而求得

$$E^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

其中 $n$ 為一個正整數，但閱卷老師並不知道這是課本的過程而認為這個解答是錯的。幾年前我到成功中學參加教師引導會，跟他們談一些大專聯考的這些題目的時候，有個學歷史的教務主任，

很有興趣來聽，到了最後他問了我一個問題，請問教授大專聯考數學命題到底要出什麼題目。我一聽我就說，你這個問題實在問的太好了，我告訴你一定是出重要的題目，他聽了以後他也說教授你回答的很好，那請問你什麼是重要的題目呢？我說大學教授在出題目當然是出大學教授認為重要的題目，當然不是你高中老師認為重要的題目了，他說，唉呀你回答太好了，所以我們要多多跟大學教授學習呀，我們才知道哪些題目是重要的題目。這個是開玩笑的，不過我今天主要的就是想要跟各位談一下推理題的特色。

其實談這個特色，還不如談一下題目形成的過程，這些題目形成的過程裡面，有的題目是比較好的，有的題目是比較不好的，那麼我們來分析評論，最後的時候，我們有可能會凝聚出比較容易掌握的一些標準，以後在我們出題的時候大家會比較容易掌握這個題目要怎麼樣出比較好。實際上，根據我們的經驗來說，大部分出的好的題目，都是要很用心的在做這件事情，就是有的時候我們對於一個題目剛發生的時候，可能是一個想法，這個想法突然出現以後，要怎麼樣把他凝聚成一個相當恰當的問題，這中間其實要經過一段時間，或是討論或是修訂。比方說以這個來講，假定說我們今天想要測驗學生的是正弦定律

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

假如我們想要從這裡面產生一個題目，當然我們可以有多種的方式。有一種方式可能是這樣子的。比方說，我們問他，如果 $a, b, c$ 都小於 $R$（三角形的三邊都小於這外接圓的半徑），請你證明這三角形一定是鈍角三角形。這個題目呢，我們希望他做的事情可能是下面這樣的一件事情，就是他把這個 $2R$ 移過來以後呢，因為 $a$ 比 $R$ 還要小，所以 $\frac{a}{2R}$ 就會比 $\frac{1}{2}$ 小。因此我們知道，每一個角的正弦值，通通都小於 $\frac{1}{2}$。可是每一個角的正弦值都小於 $\frac{1}{2}$ 的話，當然不可能每一個角都小於 30 度，因為三角形三內角和是 180 度，所以有兩個角要小於 30 度，而有一個角要大於 150 度，就是說這個角是在第二象限，因此他至少有一個角是鈍角。這個題目到底出的好不好是另外一回事，不過題目本身呢，告訴

我們，如果你要測驗正弦定律的話，從正弦定律表示法裡面，你可以讓他利用正弦定律來處理一下推理的題目。

我們知道，用演繹法來推理是數學學科的一個招牌。因為在數學學科裡面，特別是大家都知道，像平面幾何這樣子的，從假設求證，很多的命題、定理，在告訴學生的時候都應該要伴隨著一個證明，所以用演繹法來推理在數學的學科裡面，是一個不可或缺的東西。推理本身也不是一個純粹邏輯上的程序，當然要有一個數學的意涵在裡面，比方說剛才我們講到的題目，就是說如果三邊長都小於外接圓的半徑，那麼請他來證明一個鈍角三角形，在這裡面他除了邏輯的推理之外，最重要的就是他必須要有數學的知識。就是對於數學素材內容及知識這些東西要有相當的掌握。

一般來說呢，推理的題目是有別於一個選擇題，或者是有別於一個純粹計算的題目，因為他推理的過程並不是說完全的獨立的，所以，也難免會跟計算同時發生，就是說在你推理的過程裡面，可能需要透過計算來得到足夠的資訊，然後再利用這個資訊為下一步推理的開始，或者判斷的依據等等。所以一個推理的題目，他可能是純粹的推理題，也可能是跟計算混合的推理題。對於傳統的推理題，我們現在給他一個名稱，叫做這個「非引導式試題」。這個名稱的出現，是因為我們主要要談的是「引導式的試題」。因為有引導式的試題，所以把原來非常傳統的這個推理題，就好像剛看到的那個三邊長度小於外接圓半徑，此題要證明什麼東西？假設什麼？求證什麼？這麼直接了當的這種問法，我們現在暫時給他一個名稱，叫做非引導式試題。我想這種題目就是假設求證，很單純的一個命題，這裡給了一個不恰當的事例。這不恰當的事例是一個這樣子的題目：「$C, D$ 是兩個圓，假設 $D$ 圓完全落在 $C$ 圓的內部，求證 $D$ 的半徑小於 $C$ 的半徑。」有兩個圓，有一個圓在另外一個圓的內部，要求證裡面那個圓的半徑要比外面那個半徑要小，這題目，學生看以後就覺得奇怪，這事情不是很明顯嗎？所以學生的回答可能是這樣子，他用歸謬法。歸謬法當然是我們演繹法裡面很強勢的一種證明，他可能這樣寫：「如果不然，即若 $D$ 的半徑大於 $C$ 半徑，則 $D$ 圓不可能完全落在 $C$ 圓的內部，證畢。」你看他證明到底證了沒有呢？當

然有的學生他可能就跟你講說廢話，如果 $D$ 比 $C$ 大，如果 $D$ 已經完全在 $C$ 的內部了，那麼 $D$ 的半徑當然比他小嘛對不對，不然怎麼可能，這題目還居然有一個大學教授想出一個證法，有別於剛剛那學生的證法，他說 3.14 乘上 $D$ 的半徑平方，這代表 $D$ 的面積，小於 3.14 乘以 $C$ 的半徑平方，因為上面比下面小，3.14 約掉，平方小於平方可推得本身小於本身，就是沒有平方的時候也比較小，得證。這個大學教授因為回答了這樣一個問題，而被很多學生都看不起。所以也就是說我們出推理題，很顯然的要提防剛剛那種現象的發生，像剛剛有關正弦定律的題目，學生可能還要想一想。但是，以剛剛那個題目來講就很麻煩，甚至於當學生那樣回答，你都不知道怎麼樣改？到底要不要給他分數呢?

現在給各位一個看起來更了不起的題目，有一個實係數的行列式

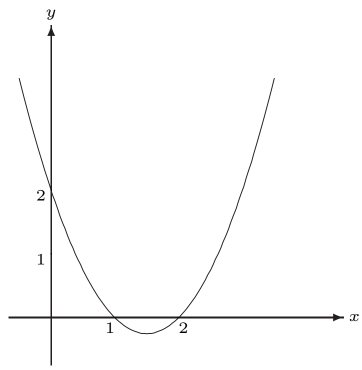
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix},$$

這行列式很大，$4 \times 4$ 階，其中 $a, b, c, d, e, f$ 都是實數。可以看出來這行列式是非負實數嗎？這個行列式是所謂反對稱的，就是說它的斜對角線上都是零，而對稱的位置剛好互相差一個負號，要證明這個行列式大於或等於零。各位這個題目呢，是出現在大概 75 年左右的大專聯考自然組的試題裡面。這題目非常可怕，這題目答對率非常非常低，大部分人不知道這題目在幹什麼，當你看到這個行列式的時候，跟大於或等於零這件事情，幾乎沒有辦法有任何的關聯，那你想到唯一的辦法就是，只好拼了老命把它展開。展開以後呢，一大堆式子在那邊怎麼辦呢？就說它大於或等於零，故得證。當然如果你詳細的分析這個標準答案的話，把它展開以後，因為這些都是文字的，所以希望你做某種組合以後，便成一些平方加平方加平方類似像這樣子的。因為好多個平方加在一起。當然大於或等於零諸如此類的。但是其實這樣子的一個問題，當時那個出題者把它出出來，是因為他把研究所裡面的某些素材拿來變成這個考高中生的題目。因為這個命題，它在 4 階的時候對，6 階也對，8 階也對。就是說，它只要是偶數階的話，

反對稱的矩陣的行列式一定大於或等於零。這是一個李群論，李代數裡面的一個大定理。當他這樣擺出來的時候，變成高中生好像可以做，這其實是一個非常不恰當的命題。我們不能因為某一個命題，在他寫出來的過程裡面，每一個字高中生都讀得懂，那你就要他去證明這件事情，這是不合理的。

還有一種情形就是說，這個如果是奇次的行列式，而且是反對稱的話，行列式就一定等於零。在這裡呢，特別舉出大專聯考在 75 年的白色恐怖時代裡面，就會出現這種非常非常糟糕的題目。當然以當時就台灣有限的幾個數學家分佈來講的話，我大致也可以判斷出來誰出的。

下面跟各位談一下引導式的題目，給定二次方程式 $f(x) = (x-1)(x-2)$ 和它的圖形




這個圖形在考試的時候，是先給學生，告訴他說根據這個圖形的分佈，這個根是在 1 跟 2，然後這個圖形在 1 的左邊是正的，在 1 跟 2 中間是負的，在 2 的右邊是正的。所以，它有一個正負正的次序，就是說我們正負正這樣一個排序來紀錄這個圖形的上下關係。也就是說正代表第一個正，代表從左邊過來，這個圖形都在上方，接著圖形就到下方，然後圖形到上方。1 跟 2 不是很重要，只是說它這個圖形有這個正負正的關係，但是根據這個根的位置，這個題目開始的時候，用文字跟學生作一個簡單的介紹說明，說正負正是怎麼樣的紀錄，比如說像這個同時，也跟學生講一個重根的情形。就是它是 $(x-1)^2(x-3)$，這也是在這個命題裡面介紹給同學。所以這個命題有一點閱讀的味道，就是開始他要先閱讀題目，閱讀到這一部份的時候，我們是利用問他重根的

情形時，圖形的上下關係是什麼?它是負負正，從左邊過來是負負正，所以，因為有重根的關係，可能有連續兩個負，同學們應該要發現到，如果是偶數的重根，如兩個重根的話，那麼可能是負負，那麼如果說是單根的話，就是一負一正或者一正一負，接下來呢，給學生最主要的一個問題呢，是假定有一個四次方程式，剛剛這個展示的例子一個是二次，一個是三次，現在就是問他一個一般的四次方程式。對一個四次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 來講，下面的這種分佈，正負正負這種分佈

1. $++$
2. $+++$
3. $+-+$
4. $++++$
5. $+-+-+$

哪一種情形不可能發生？正確的答案是第四個，第四個，因為它這個如果它有四個正號的話，它代表有三個地方發生根。把這個實數軸分成四段，如果是正正的話，表示這個根至少是一個二重根。所以，它變成三個根發生的地方，個別都是至少二重根，這樣根的數目，就超過這個方程式的四次。所以，這個題目他本身，其實就是一個重根，這個圖形上下時候的這樣的一個判斷。當然這個題目它還要求同學們要說明為什麼做這樣一個選擇？這個說明的部分也是要考慮計分的。看看下面的這一個問題。如果 $f(x)$ 的正負排序是正正負正正，請說明 $f(x)=0$ 有幾個實根？這個題目這樣子出是非常非常糟糕的。因為，第一個，你沒有說 $f(x)$ 是幾次？所以兩個正正連續發生的時候，它可能有一個很多次的重根在那裡。如果你不是這樣的話，它的 12345 它分成 5 個部分，那就是四個實根。也就是說重根到底算不算呢？都沒有說清楚，就馬馬虎虎問了一個這樣的問題，是非常不恰當的。

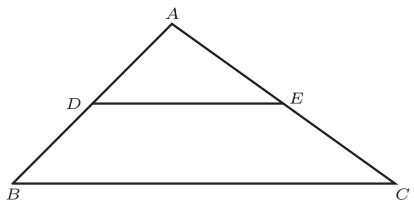
剛才這個是引導式的試題，在這裡引導式的試題裡面，那麼待會各位有空的時候，可以看一下在這個題目的全貌，通常來講的話，它是從一個比較簡單的說明出發，讓學生能夠在短短的時間

裡面，比如說 5 分鐘到 10 分鐘，能夠掌握到一個處理數學現象的方式，比方說正負正，用這個來記錄圖形的上下關係，然後在這裡面有一個讓他練習的機會讓他看看他自己是不是能夠掌握。透過自己的練習，來掌握到這樣的一種處理，接著就問他一個比較深刻的問題。

第三個類型，是所謂的偵錯題，在高中的課程裡面，有的時候，老師常常發現學生比較容易犯的錯誤，最主要就是在 $xy$ 這些數目字，它滿足一關係，這個關係就是 $5x^2+4y^2-10x=0$，所以這兩個數目字它不是完全自由的在變化，現在要求 $x^2+y^2$ 的最大值。學生他在做到了最後的時候，他看到有一個負的平方加上 $\frac{25}{4}$，他就說當 $x=5$ 的時候，它有最大值，可是實際上當 $x=5$ 的時候，不管 $y$ 等於什麼，都沒有辦法滿足剛剛的那個關係，所以 $x=5$ 超出剛剛這個 $x$ 可能範圍。各位可以看出來 $5x^2+4y^2-10x=0$ 是一個橢圓，所以對這個橢圓來講的話。必須首先要注意到 $x$ 的範圍，然後才能夠處理這個問題。這個題目是一位高中老師所提供的。後來，我們在試測的時候，被試測學校的高中老師，對這個題目的反應相當好，他們覺得像這樣的題目，常常能夠提醒同學們，在處理這類問題的時候，要更加的注意小心。所以一個偵錯題，基本上來講，就是更切近我們講的，在這個推理的過程裡面，是不是容易犯某些錯誤，而當我們希望這個錯誤，比較是數學上理解的錯誤。

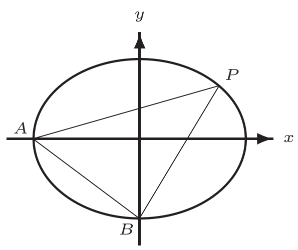
接下來談推理命題的時候，應該要注意的事情，也舉一些簡單的例子，我相信各位當然也可以舉出比我更好的例子。第一個就是說，當我們出一個證明題的時候，我們要避免他可以用一個下游的定理來回證上游的證明。因為在這個題目或者數學知識的發展中，有一些是比較基本的定理，然後慢慢發展以後，變成較為複雜。有的時候我們想要基本的這些問題，結果他使用後面的定理來證明的時候，就違背了當初我們出這個題目的意思。比方說，你如果要他證明畢氏定理，他可能用餘弦定律 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C$，當 $\angle C=90^\circ$ 的時候, 畢氏定理就成立了。就違背了你希望他證明畢氏定理的一種想法，接下來這樣一個命題是在國中的幾何課本裡面，在三角形內左邊有一個中點畫一條線跟底邊平行，這樣過

去以後交到右邊的那個邊




要證明右邊那個邊交到的點也是中點。結果學生說，這兩條線平行，所結出來的這兩段是成比例的，因此左邊的比例是 $1:1$，那右邊的比例也應該是 $1:1$，所以得證。其實這是一個比較下游的結果。而實際上，這個題目本身呢是比較早的一個定理：在這個平行線平行線被一些其他直線所截，那麼截出來這個距離呢？是成比例。所以說我們要注意當我們出證明的時候，須要稍微思考一下，在這個證明題的發展過程裡面，會不會有更複雜，更有利的命題，可以導致於，你所給的比較基本的命題。

第二個情形就是說，有的時候，我們出一個題目，也許難了一點，我們給他一個提示吧！可是，我們也要避免給他一個不當的提示。很可能我們給他的提示不是很恰當。比如說像這個曾出現在大專聯考的題目。在大專聯考裡面，當然是沒有提示的，我們只是藉由這個題目來說明，一個不當的提示可能是什麼樣子。這個題目是說「設 $A, B$ 兩點是固定的，$P$ 點是變動的。請問三角形 $ABP$ 的面積什麼時候最大？」




這個題目，在考試的時候，$A$ 跟 $B$ 這兩個值是給定的，題目要求要來計算那個 $P$ 點詳細的位置。那假定你給他的提示是說，如果 $P$ 點的切線會與 $AB$ 平行，就是當這個最大三角形發生的時候，過 $P$ 點的切線會與 $AB$ 平行。那你給他這樣的提示就是希望他去計算在 $P$ 點的切線斜率，然後令這個斜率等於 $AB$ 這個斜率，利用這個關係式，把 $P$ 點的位置求出來。可是，這樣的提示對學生

來講，是相當的突兀的。因為，原來的問題是這個三角形的面積什麼時候最大的問題，為什麼會跟在 $P$ 點的切線扯上關係呢？對他來講，是要跳一步，才能想到的一個現象。如果你不做這樣的提示的話，高中生的做法可能用參數來代這個 $P$ 的座標，比如說 $P$ 的座標是 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$，然後來利用座標的關係，把三角形的面積求出來，去對 $\theta$ 求微分或者配方等等，來求得最大值所在的地方。所以對這個題目來講，倒不如不要做任何提示。即使你提示的是 $P$ 點的座標是 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$，也可能有的學生（雖然很多老師都會教）不懂參數的表示法，但是它可能並不在高中的課程標準內，當你做這樣一件事情的時候，這個提示有可能對他來講反而形成一個障礙。

另外，還有一些有關出題目要注意的事情，在進一步解釋這些事情之前，我們做一個簡單的要點說明，我們在出題目的時候，這也許不只是在推理題，我們要注意問題是不是有意義? 剛剛各位有看到 $4\times4$ 階的行列式，大於或等於零這個問題。這個問題不是沒有意義，而是對高中生沒有意義，它對進階的數學家來講，有其特殊的意義，但這意義對高中生來講是不成立的。或者剛剛講的，要學生去證明這個圓的半徑比那個圓的半徑要來的小。這個問題本身可能沒有證明的需要。所以第一個要注意，所出的題目是不是有意義。而且在高中老師出題目時要經過反覆的討論，把這個題目的意義找出來。

第二個呢，變化不求多。就是說有的人它很喜歡出一些題目，這題目要這樣做，要那樣做，那個結果拿過來，做到這裡，這個結果再去做那個，變化太多，並不適合做一個考題。而且如果說這個學生或者老師，看到這個聯考題目這麼繁複，當然會引起他們很大的恐慌，就把原來學習的數學所掌握的最基本原理、原則的動機，都打亂掉了。

第三個就是目標忌繁複，這個目標指的是測驗目標，你就測驗一個目標就好，比方說你會不會正弦定律，或是餘弦定律，你會不會使用內積等於零來證明兩個向量是垂直，或者你能不能使用內積來得到一個角度是多少等等。同一個題目裡面有清楚測驗目標，不要太複雜。

第四個，就是對象要區分。這個問題可能比較困難一點，這個意思是說，我們這個題目出來，是想要用這個題目挑出很好的學生呢，還是說只想知道他有沒有把習題都做過一遍，就是題目是屬於所謂的學科能力基本測驗第二階段的指定考科的，或者是因應大學科系，為了要拔茁非常特別的人才，而必須要出一個較高難度，或者是比較有深度的題目。我們的這個測驗的對象，也就是如何篩選考生，考完試以後，這個題目會有一種所謂的「鑑別率」，我們從這些統計資料裡面，可以發現到哪些題目是比較合適在哪種考試裡面出現。

接著當然是文字要通順，層次要分明，特別要做引導式這種題目的時候，這個題目本身有點像一個閱讀測驗，所以在這個題目的文字部分，要讓考生在閱讀的時候覺得通順、自然，並且是從比較簡單的觀念出發，由淺入深，由簡入繁等等。求證講清楚指的是如果你希望考生要做什麼樣的事情，你就應該把它講清楚，同時配分也要均勻。我們命題時要想到改考卷的時候，有的題目它的做法不只一個，所以你在配分的時候，應該是在這個題目本身要預想到如果完成某些階段，他可以得幾分，不應該有這個頭重腳輕的情形，大致上就是說，如果出題目能夠掌握這一些要點，前面四個是題目的本身，後面四個是題目本身已經形成以後的文字處理的部分。

再提醒各位一下，如果 $f(x)$ 是一個多項式的話，前面一定要寫是整係數多項式還是實係數多項式等等。大家也知道在若干年前有一次大專聯考裡面，有一個題目說這個多項式的根是有理根，沒有說係數是整係數，因此那個題目最後就變得只好送分。所以，每次談到多項式的時候，必須要先是什麼係數說清楚，其次呢就是，像 $(x, y)$ 這樣有序實數對，我們應該要先說清楚它是座標還是最大公因數，因為這樣一個表示法，在不同的這個場合有不同的意思。在現在的這個一綱多本的情形之下，我們也要注意到，有些幾何上的符號，比如說，$\overline{PQ}$ 這到底是代表一條直線，還是代表線段 $PQ$ 或者線段的長度等等。如果沒有把握的話，就應該把這個記號先說清楚。有的時候我們談到一個象限，象限的定義是不是包含座標軸，一般來說是不包含，不包含的話，我們

問問題的時候，就得小心。比方我們說這個圖形是不是只在第一象限裡面發生，就必須想到 $x$-軸的正方向一定要排除掉，有的時候我們講錐線，錐線是一個比較籠統的辭語，包含了橢圓、雙曲線等等。可是，最廣義的錐線甚至於包括退化的情形，例如題目中若問平面跟錐線的相交，那情形各式各樣，如錐線有沒有包括退化的情形，這個當然也應該要說明。還有就是在題目文字是橢圓，結果圓也不小心跑出來。比如說 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，你要談焦點的時候，那麼 $a$ 如果等於 $b$ 的話，就不是這麼回事了。所以一定要先說明這些情形。其次就是當你在給分的時候要先說清楚，過去也發生過一個情形，我們說請選出正確的選項並解釋（十分）。結果開始閱卷的時候才決定，選出正確的選項是幾分，解釋是幾分，這樣的話，不如在開始的時候，就先說清楚，選出正確的選項給 4 分或者幾分，解釋你為什麼做這樣的選擇，給多少分等等。引導式的命題對各位來講是比較新的，我們還有一點時間，所以請大家看看另一個題目：第一步在數線上把實係多項式的根標出來。標出來以後，再標每一個區段上（不含這個標的點）的函數值的正負值，這個叫它一個正負排序。然後問了一些關於正負排序的問題。這樣的一個題目，有的時候會引起一些老師的恐慌，覺得說這是一個新的東西，在我們新的教材裡面沒有談正負排序，那你又突然跑出這個東西，那我們應該怎麼樣教或如何準備很多這樣題目給學生呢？其實並不是如此，我們必須回過頭來想一想，這題目牽涉到勘根定理及重根，對這個多項式圖形的影響。所以，就這個題目來講，不如回到最基本面來理解這個多項式函數圖形，在通過這個根的時候，上下走位走向的問題。圖形它怎麼走，就是函數圖形的這個往上走往下走，這個東西其實是比較基本的。各位也許看到某些示範性，就是說這個引導式的題目，文字裡面，初看的時候都是陌生的，當你仔細的閱讀，大概五分鐘或十分鐘後，就可以完全掌握這題目它到底在問什麼，表面上看起來跑出一個正負排序的一個新的名詞，但實際上所有的觀念都是知道的，這題目在試測的時候，實際上是有百分之三十的同學是可以回答的相當不錯的。過去的時候，有的時候因為產生一些新的題型，引起一些高中老師的恐慌，所以待會兒進行的時

候，如果各位發現有任何可能引起恐慌的這個題目的時候，請各位立刻用很恐慌的方式提出來。我們大家可以好好的討論一下。不知道各位有沒有什麼問題？

林教授福來:

大家有沒有問題？問題可能要慢慢出來。我們先謝謝張教授，剩下的時間就借給我們。張教授在談的時候，我回想前幾年，大考中心的這些研究，看看最近的試題開發的狀況，突然警覺到說我們大部分的題目，是在演繹的推論規則底下在發展，也就說，從一個資訊到另外一個新的資訊，學生不一定是走演繹的路。如果說我們開發的試題偏向演繹，對一些幾何型態的學生，可能在聯考這樣的考試就會比較不利。所以我這邊臨時想到我們實作的時候，可以往哪幾個方向來想，題目應該怎麼設計。

我們在師大一個研究計劃裡面要談過，從數學的一個資訊，經過一些推論的規則，然後得到一個新資訊這樣數學推理的歷程。這一個簡單的模式，讓我們可以看到，高中階段的學生所經驗過的一些推論規則，有哪一些？吳家怡小姐也在我們的研究計劃裡面，目前研究計劃所得推論的方法有三種，演譯、歸納及視覺推理。演譯的部分大家比較清楚，而歸納所指的跟數學歸納法又不太一樣，數學歸納，除了那些格式之外，其實它是演譯的。歸納是透過觀察以後，比較自然科學的一種，在數學裡面，可能不當做是一種證明，但是它是歸納出一些規律，數學規律等等這些這樣的事情。而視覺推理等一下可能舉一兩個例子來看。而類比的情形，我想我們數學裡面常常從資訊到新資訊中間，常常是透過類比的方式在獲得，但是我想這些都是可以讓我們思考的，當我在設計一個推理題的時候，這些不同的推理規則都是我可以去取材的。

昨天陳創義告訴我一個例子，他去調查一些我們大學部的學生，然後他問了這樣的一個問題，一個圓柱，然後有一個斜切在這裡，然後用剪刀把這個地方剪開，所以它畫一個圖，即它從這裡展開以後，會不會是像這樣的一個圖，展開的圖會不會是這樣?像這個東西，基本上，是可以當評量問題，我們直接就問展開以

後為什麼不可能是這樣？如果學生他說，雖然這裡我們看起來是這個樣子，可是因為它是投影以後的結果，所以你說，其實它是一個橢圓在這裡，那這個地方它是圓滑的，散開以後不可能有尖點，這其實是他很好的一個對幾何特徵掌握的一個很好的理由。類似的問題我們是可以問的。

張教授海潮：

所以這個題目，也適合出選擇題。

林教授福來:

我命選項讓他去選。

張教授海潮：

讓他選，要更精確的值，要不然會沒辦法改。

林教授福來:

另外，比如說，剛剛我們講的視覺推理，其實任何的幾何變化，我們都把它透過幾何變換的方式來推論一些事情，我們都把它視為是視覺推理。比如說，平移、旋轉、鏡射或是伸縮，上個禮拜師大舉辦推薦甄選，命了一些題目去測參加的那些高中生，發現他們投影的概念非常好，透過投影變化來處理問題。像正投影的變換。這一類我想從這個方向去思考一些問題，數學推理的問題應該還可以再開發的更廣泛一點。

這既然只是一個工作坊，我們在模擬學習怎麼樣設計一些問題，所以可能我們自己要先解放，題目不必要設計的很難，我們應該照顧到各種思考傾向的學生，有比較文字推理型的，有比較屬於視覺推理型的，能夠兼顧來開發一些問題，對以後的考生我想應該是公平一點。所以，透過剛剛我在實作的時候，我們可以思考幾個命題的方向，也就是說有不同的方式去設計問題。

比如說，在你教學的過程裡面，你可能對某一個題目，有一個學生的不完備論證在那裡，你要學生去評論他論證是完全正確，還是說只能適用在哪一些條件下，或者是要他去講為什麼。這一種方式也可以達到我們想看到他會不會做數學推理的目的。另外對於一些已經證明過的命題，你命一些題目看他會不會特殊化用到一般的例子上，在一般的調查裡面，我們的中學生在這方面的能力是比較弱的，一般化還好。但是特殊化，反而是比較弱，比如說一個不等式，然後用一個特定的數字在代的時候，反而學生還比較有經驗在一般的不等式，可是看到特定數字的時候，對他來講反而是很不習慣。所以將已經證明的某些命題特殊化，或者是要一般化某一個證明的過程，都是一個思考方向。推論規則其實不是只有演繹、歸納、數學推理、類比，上述所說這些都是可以思考的方向。

## 乙、如何從基本想法轉成推理題

許教授志農:

這一節由我來報告。我相信前一節張海潮教授應該講的很精采。大家應該知道說，推理命題大概是做哪些事情，那所謂的推理命題就是我們數學上要考他的證明題，要學生動筆，寫出他的邏輯推理，從他的推理來看他應該得幾分，或者寫的完不完美?這個就有點像國文科的作文。如果你比喻成國文科的作文，因為現在講究白話文，所以有的學生他裡面可能沒有用成語，都只有白話文，而白話文寫得行雲流水般，你會給他很高分，有的他不希望寫白話文，而要炫耀他古文素養，可能就用一些漢賦啊！唐詩、宋詞、元曲或者明清的小說，就引經據典講一下，你會對他鼓掌叫好，說他用的很好，就多給他一些分數。

數學的推理命題，你應該要如何設計，你到底要考他什麼?可能你要考的是說了概念、公式，或者定理，這三個東西，那你考他一個問題，你當然是希望說它能夠蘊量一下，或者思考一下之後能夠連結到說這個就是考什麼概念、公式或是定理，然後他把他套上去之後，做出來就很高興。所以，學生學得很多概念、公

式或定理，但它能不能應用在我們要考的問題上，他能用多少，我們就給他多少分數。所以，我要舉一個例子說，我們有給他問題，然後是要如何的用?在講解給例子之前，這個可能大家都知道的概念：你給一個直線之後，你只要檢查 $x=0$ 跟 $x=1$ 的對應 $y$-值都是負的，那很顯然地在 $0,1$ 的那一段的 $y$值應該也是負的。學生畫一條線也知道啊!那這有什麼用呢?那底下我們就舉例說，這個用處其實還滿大的。比如說我們要考這個問題：「假設 $p,q,r$ 是在 0 跟 1 之間的正實數，然後想要證明不等式

$$pq+qr+rp-2pqr-1<0.$$

這個問題看起來是滿困難的，因為各位是老師，所以我們要沒有要讓你親自來做。我們等一下秀四種證明給你看。這個有四個不同的解釋、證明。

第一種我們用代數的方法來證明，令

$$y=f(x)=(p+q-2pq)x+pq-1$$

你怎麼會想到這一件事情，其實我們是把原來那個不等式的 $r$，把他改成 $x$，也就是說，我們原來考的不等式是三維的，因為有 $p,q,r$，三個變數，三個在變的時候，你就很困擾，你不知道要如何控制?那我們希望說把 $p$ 跟 $q$ 先想作在 0 跟 1 之間的已知數，然後把 $r$ 當作未知數，只有一個在動的話，他當然是直線啦!所以我們若把這個 $f(x)$ 的 $x$ 代成 $r$ 的時候，就是我們要求的不等式。我要證明 $f(r)<0$，因為 $r$ 是在於 0 跟 1 之間的，又 $y=f(x)$ 是一個直線，所以我們就檢查 $f(0)$ 跟 $f(1)$ 都小於 0。那你的 $r$ 代進去，當然也要小於 0 對不對。那你把 $x$ 代 0 進去，得 $pq-1$，那麼 $f(0)=pq-1<0$（因為 $p,q$ 是介於 0 跟 1 之間的數），又 $x=1$ 代入，得到是 $f(1)=p+q-pq-1$，因式分解得 $-(p-1)(q-1)$，因為 $p-1,q-1$ 都是負的，負負得正,再加個負號，還是小於 0。所以，若在 0 跟 1 之間，你隨便代一個值 $r$，得函數值 $f(r)<0$。那也就是說，我們在證這個三維的不等式，你也可以控制兩個 $p$ 跟 $q$ 把它當作已知數，只有 $r$ 在變，就是一個直線啊，只要證明說這直線在 0 跟 1 之間的函數值都小於 0，可以直接代端點去檢查他，即為特殊化。這個方法並不容易想到。

另外一種方法是暴力法。。所謂暴力法用前面所講的文章來形容，即為白話文。因為總共有六項，那個 $2pqr$ 要當成兩項。須拆成六項要證明大於 0。就要拆成兩堆嘛，比較不幸的是，每堆都是四項才容易解，而不是拆成三項三項樣子。那你這樣子拆之後

$$\begin{aligned}1-(pq+qr+rp-2pqr)&\\ &=(1-pq-r+pqr)+r(-q-p+pq+1)\\ &=(1-pq)(1-r)+r(1-p)(1-q)>0.\end{aligned}$$

就看出來它是大於 0，因為它兩個相加的都是大於 0。所以這個就是類似說我用白話文來寫，不過我寫的巧、寫的好，還可以做的出來。

第三種想法就有點用比喻，你看到那個不等式，你聯想到我以前有讀過什麼東西？或者我腦中有想到什麼東西，可以來比喻這件事情。以你寫國文為例，你若覺得你很孤獨，那你要用的成語是什麼?那你當然用的是『前無古人，後無來者』！這一題，我就想用這個三維不等式，它應該是有幾何上的意義。所以，我們可以整理成

$$p\cdot q\cdot 1+1\cdot q\cdot r+p\cdot 1\cdot r-2p\cdot q\cdot r<1\cdot 1\cdot 1.$$

跟原來不等式是完全一樣，只是我們畫蛇添足，加了很多 1 這樣子而已。那我就要告訴你什麼事情呢?其實 $p,q,r$ 都是在 0 跟 1 之間的數，那 $p\times q\times 1$ 是一個什麼，它是一個長 $p$，寬 $q$，高度 1 的長方體體積，那你如果把我們這個教室想成是一個長、寬、高都是 1 的立方塊，那麼從一個角落畫 $p\times q\times 1$ 這個長方體，那麼 $1\times q\times r$ 就是說長是 1，然後寬是 $q$，然後高是 $r$ 的長方體的體積（也畫在同一個角落）。所以原來的不等式等於三塊長方體的體積減掉兩倍的 $pqr$，但 $pqr$ 是這三塊長方體共同的交集，故就是三個長方體的體積加起來，再減掉他們共同的部分，所以應該就是長 $p$，寬 $q$，高 $r$ 的這三塊長方體的體積的結合體嘛！可是它還是在單位體積內。所以他的體積當然還是小於 1 嘛！所以你做這樣的比喻，就知道它應該是小於 1 沒有錯。我們就舉了三種做法，看你擅長怎樣的方式，就用怎樣的思考。

那我們底下比喻、特殊化及暴力這三種方法做一個推廣。就是要講這種推廣。我們將特殊化推廣，它考了一個 $p,q,r$，這個有可能是一個大定理的雛形喔！所以我就把大定理完整地寫出來，請學生來證明。大定理顯然應該不是 $p,q,r$ 三個而已，應該是 $n$ 個。即為：假設 $a_1$ 到 $a_n$ 都是介於 0 跟 1 之間的數，我們要證明

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i}\right)-(n-1)a_1a_2\cdots a_n<1.$$

你如果把這個 $n$ 改成 3 的話，這個公式就是我們之前討論的公式。如果 $n$ 改成 2 的話，就發現這是國中生也會導的一個公式。其實就是 $a+b-ab<1$ 這個公式。那若把 $n$ 改成 1，那這個就變成是 $1-a<1$，就會得到 $a>0$。現在你若要證這個定理，因為是有一個$n$ 在變動，$n$ 是從 $1,2,3,\cdots$ 到無限，所以你就想用數學歸納法，就可以證明了,但對學生而言，數學歸納法可能很難。所以第四種做法就是用這個來做，用數學歸納法證一般的定理。

我們舉了這個問題，然後我們舉了四種你可能都想不到的方法來證明它。底下我想說，如果我們要考這題，那我們要怎麼出呢? 因為學生沒有那麼厲害會這四種中的任何一種，所以我們是不是能引導他一部分，讓他能夠完成這個問題。接下來，我們就要說明，如果我們是老師，要出這一題的話，那我們應該是出成怎麼樣?我們的第一個範例：

底下是有關命題

“若 $0<p,q,r<1$，則 $pq+qr+pr-2pqr<1$。”

的證明。

(1) 由 $0<p,q,r<1$ 得到

$$0<pq<1,\quad 0<qr<1,\quad 0<pr<1.$$

(2) 由 (1) 得到

$$pq+qr+pr<3.$$

(3) 由 $0<p,q,r<1$ 得到 $0<pqr<1$，因此有

$$2pqr<2.$$

(4) 利用 (2) − (3) 得到

$$pq + qr + pr - 2pqr < 3 - 2 = 1,$$

得證。

針對這個證明，試選出正確選項：

$(A)$ 證明 (1) 犯了錯誤。

$(B)$ 證明 (2) 犯了錯誤。

$(C)$ 證明 (3) 犯了錯誤。

$(D)$ 證明 (4) 犯了錯誤。

$(E)$ 證明完全正確，沒有錯誤。

我們這個範例是說，把剛剛那個問題出成偵錯題。因為那一題的證明過程中，有些地方學生是會犯錯的。我們就把容易犯錯的地方給他寫出來，所謂「偵錯題」就是說，學生要動的筆墨比較少，他要想到底哪裡對哪裡錯，他想清楚就好了。錯誤是在他兩個不等式不能左邊減左邊，右邊減右邊，所以這個證明是不對的，這是一則偵錯題的例子。

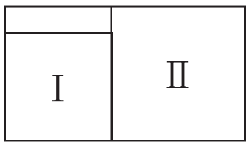
那是不是還有其他的出法呢？假設我們這一題有四種做法，一種是特殊化，所以一種用特殊化來引導他。一種是一般化，也就是用數學歸納法證 $n$ 維的。可是老師一定是第一小題叫他做 $n = 2$ 的情形，再來叫他做 $n = 3$ 的情形，$n = 3$ 當然要 $n = 2$ 來推，所以我們就此種方式命引導題。所以那第一小題就設計成 $n = 2$ 的情形：如果 $a, b$ 都在 0 跟 1 之間，叫他證明 $a + b - ab < 1$。第二小題就是證明原題目。第一小題只需相減、因式分解就看出來了，目前的關鍵是如何使用第一小題的結果。第一件事情，要把 $pq + qr + rp - 2pqr$ 拆成 $a + b - ab$，作法是第一個 $pq$ 不動，把 $r$ 提出來，變成 $(p + q - pq)r$，你會發現說，$p + q - pq$ 這個就跟上面的 $a + b - ab$ 一樣！小於 1，就把它當作 1，所以原式就等於 $pq + r - pqr$。所以他用了一個 1，就得到了他小於 $pq + r - pqr$。同樣的方法用一次，把 $pq$ 當作 $a$，$r$ 當作 $b$，這個也是 $a + b - ab$，所以得證。這樣子引導考生，他如果懂得如何適

當的引用 $a+b-ab<1$，也就是說他會適當的歸納的話，也可以得到這完整的證明。這是我們第二種引導他的的形式。

第三種我們就是用直線，（第一種證法）來引導他。如果 $a,b$ 在 0 與 1 之間，想要用直線知識來證明 $a+b-ab<1$，直線的知識識只用一維來看二維，就是要把 $a$ 當作是已知數，把 $b$ 當 $x$，令 $f(x)=a+x-ax$，因為 $f(0)=a<1, f(1)=1$，所以 $f(b)=a+b-ab<1$。學生讀懂了這段文字，就可以依樣畫胡蘆來做 $pq+qr+rp-2pqr<1$，首先把 $p$ 跟 $q$ 當已知數，把 $r$ 當作 $x$，經過整理之後的直線，在 0 跟 1 代入的時候都小於 0，故把 $r$ 代進去就小於 0。

最難的就是直接考他這個問題，就有我們講的那四種做法，也許各位有第五種做法也不一定,這是有關於我舉的這個例子的問題。

接下來，我想再舉另外一個例子來說明：如下圖，正方形 I（邊長為 $a$）與正方形 II（邊長為 $b$）的面積和為 1。




證明：剛好包住正方形 I 與 II 的矩形之面積

$$\leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

也就是說，你把兩個面積和是 1 的矩形的正方形擺在一起，你往外延伸做這個矩形面積的最大值就是 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$。你如何要證明這件事情？如何求出他最大的值是 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$。題目只告訴你的 $a^2+b^2=1$（因為這兩個正方形的面積和是 1）。那你想用哪句成語剛好可以來形容 $a$ 及 $b$？那我想的到的就是 $a=\cos\theta, b=\sin\theta$。