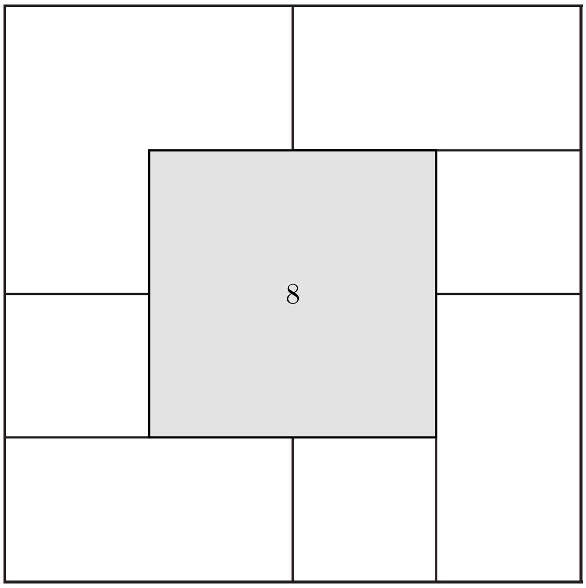
如何經營數理資優班

國立台灣師範大學數學系
許志農



八個全等的正方形一個放在另一個的上邊。如果數字 8 的正方形是最後放的，試確定其它 7 個正方形安放的順序，使得最終結果看上去像圖上那樣排列。

目 錄

最近幾年，各種資優班（數理，語文，美術，音樂，舞蹈，體育等）如雨後春筍般，在各個高中設立。學校為了招收資優生或留住優秀學生絞盡腦汁，而各學科為了派誰去教資優班，怎麼經營資優班傷透腦筋。很多學校把績優班當資優班來經營，也有學校把資優班想成績優班來訓練。

1　學校選才重點⋯重智慧，輕知識

天才‥是放對位置的人。知識是別人的，可以從書本得到的，而智慧是自己的創意或領悟，兩者有極大的差異。資優生的訓練除豐富的知識外，智慧的提升才是重點，有智慧才有巧思，才有創意及創造力。因此，資優班的招生應以智慧的檢測為重，知識的要求為輔。

又以數理資優班為例，科學靠的是懷疑，沒有懷疑科學不會進步；相反的，宗教靠的是信任，沒有信任宗教性的體會不會發生。因此，數理資優班的選才應以具有高度懷疑眼光的學生為主，而教學應該是開放性的，而不是填鴨式的信任教學。就因為東方的教學太填鴨式了，所以東方的科學仍然停留在很原始的階段。

例如底下開放式的情境試題，適合考選資優生：

例題 **1** 一家庭（父親、母親和孩子們）去某地旅遊，甲旅行社說：「如果父親買全票一張，其餘人可享受半票優待」；乙旅行社說：「家庭旅行算團體票，按原價的六五優惠」。這兩家旅行社的原價是一樣的，試就家庭裡不同的孩子數，分別計算兩家旅行社的收費（建立運算式），並討論哪家旅行社更優惠。

進退場機制的建立：學校以學測成績或自己命題的成績錄取資優生，一年之後，必須考慮有些學生可能不適合在這個班級。這時退場機制的建立就很重要，否則學生與家長可能會形成複雜的問題。

2　專題研究或科展指導⋯途徑雖多，旅人卻少

科展研究必須有開始，既使那個開始是錯誤的也沒關係，通過錯誤，透過摸索，窮盡錯誤，窮盡摸索，常常可以找到正確的出口，也許在某個未知的，說不準的，難以預料的時刻，當摸索或思索達到頂峰的時候，你就會在那個出口上。這就是從事專題研究或科展的心路歷程，也是有系統科學研究的第一步。

對於專題研究的內容或科展題目要因材施教，因人給題，就如愛因斯坦說的：「科學研究好像鑽木板，有人喜歡鑽薄的，我喜歡鑽厚的」。學生也要有愛因斯坦的研究精神：「思考，思考，再思考」。

專題研究的內容可以是知識性或知識性的延申，而學生所從事的科展問題必須是具有智慧，創意或創新的問題。專題研究是

讓學生吸取豐富知識或領會如何作研究的精神，重點在知識的吸取或經驗的累積，而科展是要求得到有智慧或創意的成果。至於創意或創造力如何誕生呢？我們引用丹增嘉措活佛在它的著作《探索夢的奧秘》中的一段話：「我們剛睡醒的時候，夢境的回憶猶歷歷在目，這時尚未完全醒過來，稱為半睡半醒狀態。有人認為半睡半醒狀態是一種天才狀態，有很深刻的創造力，就像大發明家愛迪發明電燈泡的創造力一樣。愛迪生很看重這種半睡半醒狀態，每次在潛心研究發明時，會運用自己的技巧，進入半睡半醒狀態。他會端坐椅上，利用放鬆與冥想技巧進入寤寐之間的潛意識狀態。愛迪生手握兩個鐵球，手心向下，然後舒服坐在椅子上，手肘靠近扶手，雙手下方的地面上放有鐵盤。當愛迪生入睡時，手就放鬆而自然張開，鐵球就自然掉落，碰擊鐵盤而發出聲嚮，吵醒自己，然後一再重複這個動作。」

科展的結束才是問題的開始，國內許多科展，由於老師出力太多，導致學生只是把它當知識死背，就得到不錯的名次，甚至保送大學。等到升學之後，問題就開始浮現了，無法適應保送的學系，或考試不如聯考進來的學生，這樣會導致很嚴重的挫折感。

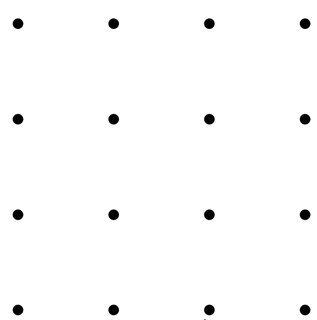
在最後一節（附錄）的內容就是可以當科展的教材。

3 充實課程…啟發重於記憶

資優課程設計所強調的是「質的提昇」而非「量的增多」，並應著重於獨立研究的能力與成果發表。舉例：對稱原理的教學實例：

例題 **2** 流傳久遠的造房子遊戲，遊戲規則如下：在下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多房子的人勝。

因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且至少有一人佔有比較多的房子，也就是說不會平手。試問：先畫或者後畫的人有必勝的策略。



教授與老師共同開發充實教材，搜集類似以上的例題，當作學生充實教材。

資優教育的方式可分成兩大類：加速教育與充實教育

(1) 加速教育：

加速教育是根據學生本身的能力，跨越年級限制，給予彈性及適性的教育，包括採用跳級、縮短修業、提早入學、進階預修等方式。

(2) 充實教育：

充實教育是在提供學生多樣化的學習內容及學習方式，以擴展其學習經驗，促進其才能發展。

4 經驗與資料的累積⋯永續傳承的重要

達賴喇嘛是第十四世的轉世活佛，如果妳相信轉世的話，那麼達賴就有六百多年的壽命了，在他腦裡累積的經驗，讀過的書籍與處理過的事物不知有多少，這也是藏傳佛教建立轉世這個概念的目的。

資優班的老師不可能永遠同一個，即使是，他也有退休的一天，因此將每年使用的教材，教授的演講講義，考試與競賽的試題，輔導學生的資料分門別類的管理，讓未來的老師可以輕鬆參考，是一項很重要的事情。我到過許多設有資優班的學校參觀過，在經驗與資料的永續傳承上，做得很好的並不多，大都由於當初沒有默契與共識，最後變成每個老師的資料不太願意提供出來（造成藏私現像）。

例如，一道不錯的科展常常第一年的學生只能得到部分成果，無法完成，如果就此放棄，太可惜，應該建檔以供後幾屆的學生參考。也許哪一屆的學生對這主題有興趣，可以有比較多的靈感，說不定會有進展，這樣下去，某一年就可以完成這不錯的科展題目。事實上，這成果是累積下來的，只是由最後完成的學生收穫而已。

除了不藏私外，讓不同學校的資優生彼此交流，也是一種不可避免的潮流。

5　教具與設備…書中自有黃金屋，網路可以一點通

資優班應有一專門的上課教室，適合讓學生分組研究，黑板也必須專門設計過。除此之外，還需有一間小型的圖書室，收集國內科普書籍，或科學教育館的歷屆科展得獎作品，各種競賽試題等。

網路提供學生查閱資料的方便性與及時性，教室可以上網是基本要求。

6　水平與垂直之間…心智層面的函數

一個人的身體隨年紀增加稱為老化；而日常生活，應對進退多了之後，稱為成熟。將年紀用水平長度表示，成熟度用垂直高度刻畫，那麼成熟就是老化的函數，老化與年齡成正比，但成熟度不一定與年齡成正比。每個人的函數高低不同，有人很快成熟，有人活到老還是像小孩子，天真無邪。

這情形也發生在學生，特別是資優生，智力與心理的成熟函數上。資優或績優生隨著智力密集訓練，或學校給予較多智慧的開發，在智力成熟度的成長上，遠優於一般生；但是，有好就有壞，在心理層面的成熟上可能就落差較大。如何讓智力與心理的這函數正常，是學校輔導單位與老師需注意及配合的。

7　榮譽與獎勵…自我回饋

資優班的老師需比教授其它普通班級的老師付出更多的心力與精神，同時學生也可以完成課業之外較多的工作。所以老師或學生有興趣可以申請或參與如下的獎勵，競賽或發表個人心得與文章：

☆ 教育部教學卓越獎；

☆ 國立台灣科學教育館舉辦的中華民國中小學教師自然科學與數學教學設計競賽；

☆ 高級中學數學、資訊及自然學科能力競賽（初、複與決賽）；

☆ 縣與全國科展；

☆ 旺宏科學獎；

☆ 全國高中高職數學作文競賽；

☆ 奧林匹亞競賽；

☆ 師鐸獎；

☆ 中小學數學教師創意教學競賽；

☆ 台灣區 TRML 高中數學競賽；

☆ 環球城市杯數學競賽；

☆ 發表文章於科教月刊，數學傳播，數學新天地⋯等。

8 結語⋯一場校長，老師，家長與學生深深互動的遊戲

資優班或者績優班就是一個遊戲，一場校長，老師，家長與學生彼此間必須互相信任的遊戲。遊戲的成功必定是四方的努力配合，遊戲的失敗也是四方想法不同，目標不一致所引起的。

9 附錄：與奇人相遇的故事

與奇人相遇的故事發生在它該發生的時候：你無法安排它，你無法使它發生。它是經由你的時時注意，耐心等待下，在一個不可預料的時、地忽然發生的；它不可能是在透過刻意培養或者經由頭腦強烈期待下誕生。

與奇人相遇會讓你有如拈花微笑的迦葉一樣，瞬間開悟，找到那問題的最後一塊拼圖；與奇人相遇也會讓你看到現代阿基米得，光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」的神情。奇人就是隨身帶著火把，如影隨形，走到哪，亮到哪，摸索開關對他來說是多餘的。

《與奇人相遇》是在描述或追憶過去十年來，在我的教學或演講現場，與我有過深深互動的幾位老師或同學。由於當時他對討論問題的瞥見，讓我得到了那個問題的最後一塊拼圖或者讓我看到一位現代阿基米得，光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」的神情。我把這與他交流的時刻稱做“與奇人相遇”，因為在這個特殊的問題與特殊的時間點上，他的確像是一位奇人，他有很出神入化的看法跟解讀。為了不讓這些瞥見消失，每次我都會在事後細心的回顧與整理當時的數學資料，讓我對這個數學問題的瞭解更上層樓。所以這些“奇人”是讓我數學進入另一個高度的最後一塊拼圖。每當我在中學演講，講到那個數學問題，我都會想到他們那不可思議的瞥見，也會儘所有可能，將他們的瞥見傳遞給在場聆聽的每個人。

我之所以稱他們為奇人，就是因為在那些問題上，他們的表現與凡人大相逕庭。所謂凡人就是當他處在一間黑暗的房間時，他只能借助摸索，推理或想像去尋找燈的開關位置；而奇人就是隨身帶著火把，走到哪，亮到哪，摸索開關對他來說是多餘的。凡人總是喜歡隨身攜帶一長串的鑰匙，逐一嘗試哪把才能打開門鎖；而奇人就是隨身帶把萬能鑰匙而已，每個門鎖都難不倒他。

有一天早晨，在系辦看到剛到學校的王老師從前、後口袋掏出三大串鑰匙，少說也有二十幾把以上。我問他：「需要帶這麼多鑰匙嗎？」他回答說：「家裡，車子及辦公室的，共三串。」當你在路上撿到一把鑰匙時，不會覺得它很重要，甚至不想檢它，因為你不知道什麼時候，在哪裡用它，你把它當成塑膠與金屬的混和物而已，但是對遺失鑰匙的人來說，它可是至關重要的，因為他知道何時，何地及如何使用它，沒有它就進不了門。我在想

「如果王老師能夠練成像神偷那麼靈巧的雙手，那麼只需隨身攜帶一支小鐵絲就夠了。」學校或補習班老師常常在幫你打鑰匙，你滿腦子攜帶了他們給你的鑰匙。很沈重的鑰匙，你又很緊張，深怕掉了任何一把鑰匙，做不了題目，考試失算。聰明一點的老師或學生自己，可以將這些鑰匙整合成一把，就像神偷所擁有的小鐵絲那一把一樣，這樣頭腦不僅放鬆，走起路來也輕盈，考起試來也有信心，但是唯一的缺點就是「神偷」兩個負面的字。奇人就是連神偷的那把小鐵絲也不需要攜帶的人，它是徹底的放鬆，真正的輕盈。帶著神偷的小鐵絲是假的放鬆，是贋品，是放鬆的冒牌貨。

頭腦是一個奇怪的設計，存在頭腦裡面的總是不完美，不美麗，不完全或不完整的知識。每當老師教授的數學深層意義還沒被你瞭解時，這些數學知識就會一直寄放在頭腦裡，讓頭腦感受到緊張與沈重的壓力。所以當數學深層的意義不被瞭解時，你就無法達到頭腦的平靜。

欲讓頭腦達到平靜，不被寄放的數學知識所困擾的方式有兩種：一種是放鬆…達到可以讓頭腦放鬆的接受數學知識的境界；另一種是放棄…假的放鬆，它是放鬆的贋品，替代物，或冒牌貨，他會讓你離放鬆更遙遠。奇人就是懂得放鬆的登山高手，他攜帶著沈重的裝備，在攻頂的路途中，逐漸的卸下這些壓力與重擔，只有放鬆與輕盈的狀態才容易登峰造極，奇人更懂得如何在沒有裝備的情形下，可以像有裝備般的安然下山，化阻力為助力，這就是放鬆的最高境界，也是奇人的本色。

9.1 綠衣黑裙的綠巨人

台大附近，汀州路旁，新店溪邊的師大分部是我大學讀書成長的地方，也是我從事教學、學術研究的地點。三月的暖陽從蟾蜍山上斜照全校園，來自全國的十來位數學資優學生，在數學館三樓的 M310 教室一起探索數學的奧秘，他們無暇欣賞這美景。吸收教授的數學課程，考好試，當選只有六個名額的國手才是他們此行的目的。《算術講義》是我所教授的一系列課程之統稱。在這課程裡，不僅教授代數、數論，也涵蓋一點組合、幾何與不等式。剩下十來人的課程安排，通常上課兩個小時，做練習一個小時。記得有一次，我給的練習是取自前蘇聯的一道立體幾何問題，它

是一道幾何不等式問題，看起來是道難題。

學生絞盡腦汁的想這個問題，我以愉快的心情巡視並欣賞他們的解題過程。通常能擠進這一關的女生僅有一、兩位而已。奇蹟就發生在一位穿著綠衣黑裙的小綠綠同學身上。在巡視的過程中，忽然在小綠綠的考卷上看到「想要解決這道幾何問題，需先證明一個引理：

問題 **1** 設 p, q, r 是三個滿足

$$0 < p, q, r < 1$$

的實數。證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

利用這個引理就可以馬上解決這道問題。接下來敘述並證明這個引理」這樣的字眼。在做比較困難的數學問題時，“先證明一個有用的引理，再利用它證明問題本身”是常被使用的手法，對我來說，這不是意外之所在。讓我好奇的是「她對那個引理的證明」，簡直妙不可言。現在就讓我們來欣賞，小綠綠提出來的引理及對這引理的美妙證明。

事實上，小綠綠所提的引理就是本章的題目。至於它的證明，小綠綠是這樣分析的：

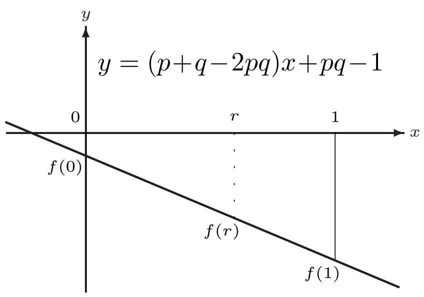
證明式子 $pq+qr+rp-2pqr-1$ 小於 0 即可。現在把該式的 p,q 視為固定的實數，把 r 當成變數，將式子整理成 $(p+q-2pq)r+pq-1$，並令直線方程式為

$$y=f(x)=(p+q-2pq)x+pq-1.$$

將 $x=0,1$ 分別代入，得

$$\begin{aligned} f(0)&=pq-1<0;\\ f(1)&=p+q-pq-1\\ &=-(p-1)(q-1)<0. \end{aligned}$$

此直線的略圖為



因為直線在 $[0,1]$ 區間的值恆為負數，所以

$$f(r)=(p+q-2pq)r+pq-1<0,$$

即

$$pq+qr+rp-2pqr<1,$$

得證。

為了讓敘述簡潔，溝通方便，或者為了引進一個較深入，不熟悉的概念，給個「定義」成為數學上克服這兩道難關的不二法門，例如「輾轉相除法」，「質數」就是為了這兩個目的才出現的名詞。但是，有時候太過熟悉的名詞，反而忘了它的定義或從來沒給過定義，例如：叫你對「人」或「時間」給個定義，你可能會不知所措，不知如何是好，或者回想不起來何時學過他們的

定義。這完全是因為頭腦只對困難的東西感興趣，對平凡容易或理所當然的事物漠不關心所導致的結果。我想了好久，勉強想出三個「人」的定義，願意在這裡跟讀者分享：

① 從負面來思考，將「人」定義為「一種增胖容易，減肥難的動物」。不知道你對這樣的定義滿意嗎？

② 從自以為是的面向來思考，將「人」定義為「一種會作夢的動物」。你想過其它動物會作夢嗎？動物作夢的模樣又是怎樣的呢？

③ 從正面來思考，將「人」定義為「一種具有幽默感的動物」。你看過其它動植物具有幽默感過嗎？如果沒有，那幽默感肯定是人的一種天性，一種特色。人們輕易的擁有它，就應該時常使用它，不是嗎？

不知道讀者對上述三種定義滿意嗎？最好是自己也給一個不同的定義，領悟一下「平凡才是不平凡！」這句話的意思。這裡所要傳遞的訊息無非是：當你對平凡的事物無動於衷，無法給定義時，相信你對困難的事物也必定束手無策，不知如何是好才是。所以培養頭腦對平凡與不平凡的概念或事物都有興趣，才是正確之道。

小綠綠對這道不等式的驚人定義

$$y = f(x) = (p + q - 2pq)x + (pq - 1),$$

引領我們進入這道不等式的殿堂。對於這樣具有睿智的小綠綠，相信她對平凡無奇的「人」這個字的定義，肯定比我的定義還不凡。真想聆聽她對「人」的定義。

9.2 石碇東街吊腳樓

到深坑老街吃豆腐，促進地方經濟繁榮，是每位台北人一生必做的功德之一。不過再深入一點，造訪繁華落盡的石碇東、西老街，可能就興趣缺缺了。我對石碇的第一印象是從電視台主播廖筱君的介紹性節目「石碇東街吊腳樓」得來的，印象中，她介紹在石碇東、西老街上捕捉美景的一些畫家。第一次造訪石碇是為了當

地一所完全中學要招考高中數學教師的事宜與對新成立的高一資優班演講而來。校長的宿舍就建在學校內，背後是山坡，好像生活在深山一樣，學校連午餐都是自理兼自助式的。當年還年輕的我，真有一點嚮往。此行的目的就是出一份數學考題，讓學校招考高中部的數學老師。如果要命一道不等式問題，最簡單莫過於拾人牙慧，我也常做這樣的事。我將上一章中，小綠綠所發現的不等式引理當作此次考試的考題之一：

問題 **2** 設 p, q, r 是三個滿足

$$0 < p, q, r < 1$$

的實數。證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

事後閱卷時發現，這則不等式還真難，只有一位應試老師完全做出來，而且他的證法大大的讓我意想不到。這位男老師的證法是這樣的：

參加甄試男老師的瞥見

首先將原來不等式重新詮釋成如下的乘積形式：

$$p \cdot q \cdot 1 + 1 \cdot q \cdot r + p \cdot 1 \cdot r - 2p \cdot q \cdot r < 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

接著利用幾何模型解釋如下：如果將

$$1 \cdot 1 \cdot 1$$

視為 x, y, z 軸正向上各取 1 單位所成正立方體的體積，那麼

$$p \cdot q \cdot 1$$

代表 x, y, z 軸正向上各取 $p, q, 1$ 單位之長方體的體積；

$$1 \cdot q \cdot r$$

代表 x, y, z 軸正向上各取 $1, q, r$ 單位之長方體的體積；

$$p \cdot 1 \cdot r$$

代表 x, y, z 軸正向上各取 $p, 1, r$ 單位之長方體的體積；

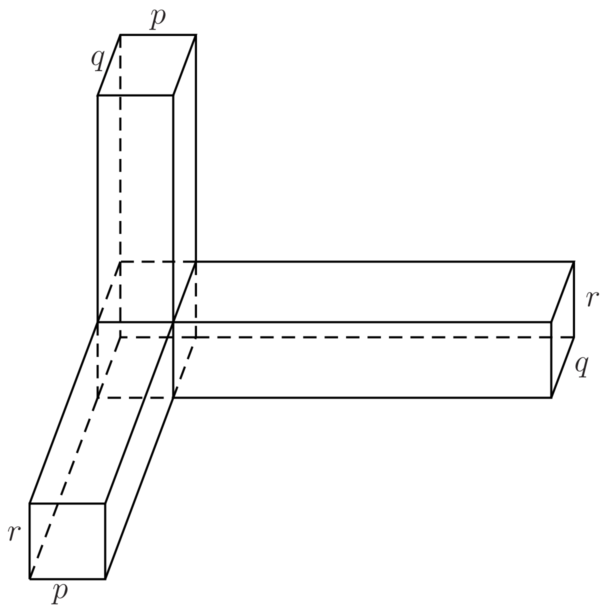
$$p \cdot q \cdot r$$

代表 x, y, z 軸正向上各取 p, q, r 單位之長方體的體積。

在此模型的詮釋之下，

$$p \cdot q \cdot 1 + 1 \cdot q \cdot r + p \cdot 1 \cdot r - 2p \cdot q \cdot r$$

就代表如下圖所示的立體形狀之體積



因為這立體形狀在正立方體內，所以

$$p \cdot q \cdot 1 + 1 \cdot q \cdot r + p \cdot 1 \cdot r - 2p \cdot q \cdot r < 1 \cdot 1 \cdot 1.$$

利用幾何模型來解不等式問題，是相當高竿的思維。顯然在考試當下，除了必須對不等式所傳達的意思瞭若指掌外，還需瞬間連結到相應的幾何模型，這堪稱為無字證明的一個典範。為什麼我知道這位奇人是個男老師呢？這可是另一個故事的開始！之後沒多久，在一次的演講裡，一位高中老師跑來問我「有一道題目，他這樣解，不知道可不可以？」就這樣我才認識這位奇人。

本章的題目在師大數學系的推甄也考過，下一練習就是當時一位學生的另一種證法，我把他的證法切割成兩個小題，方便讀者思考：

練習 1 設 p, q, r 是三個滿足

$$0 < p, q, r < 1$$

的實數。

(1) 證明

$$1 - r - pq + pqr > 0.$$

(2) 利用 (1) 證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

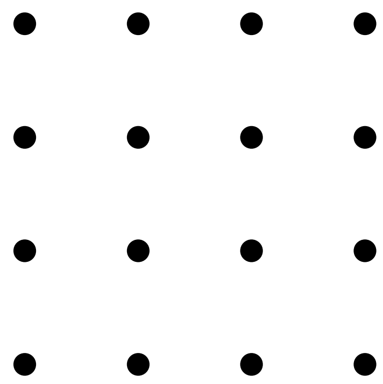
如果你會做這個練習，你將體會到那位考生，將這不等式分割得多麼恰到好處。

9.3 百年紅樓再造，十萬駝客薪傳

透過遊戲的互動，傳達數學的概念，是我一直想做的事情。但是，恰當的數學遊戲不多見，不是坊間已有解答，就是無法精準的傳遞數學概念，或者遊戲本身不具有任何數學規律或意義。感謝建中紅樓人的幫忙，讓我對一道有興趣的遊戲有更上一層樓的理解，或者說找到那道遊戲的最後一塊拼圖也可以。

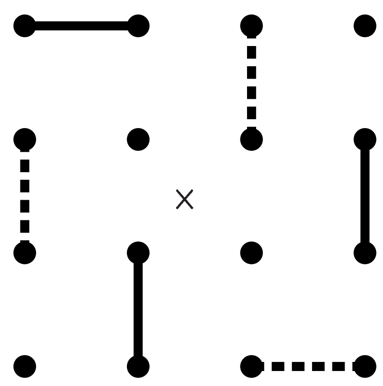
星期三下午，陰霾的天氣籠罩著台北城，即使天氣不好，也沒辦法澆熄建中學生對數學真理追求的熱情。每次到建中演講，我都喜歡採取不一樣的演講策略，或者說是一種試驗或試探的策略，在一般學校的演講，我不敢也不能採用這種模式。在“ㄇ”字形的演講場地，最適合讓學生玩數學遊戲，因為學生的互動容易，討論方便。建中的數理資優教室就是排成“ㄇ”字形。記得那次演講給了幾道數學遊戲，其中有一道叫「蓋房子」的遊戲：

問題 3 下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多房子的人勝。



因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且一定有一人佔有比較多的房子（總共有 9 間房子），也就是說不會平手。學生兩人一組玩這道遊戲，不需花多少時間就可以大戰好幾回合。重點是如何識破這道遊戲的數學意義呢？如果沒有那種想要識破它的衝動跟企圖心，你就像多數人一樣，毫無目的的玩這道遊戲。說實話，我在給這道遊戲時，我只知道後玩者常常會贏，至於贏的策略是什麼？我仍在摸索中。所以給他們玩這道遊戲，可以說是一種試探，看看可不可以找到破題的人。

在學生的喧嘩聲中，傳來很刺耳的兩個字。當下，我有如拈花微笑的迦葉一樣，瞬間開悟，找到這遊戲的最後一塊拼圖。當然，講出這兩個字的同學，稱他為現代阿基米得也不為過，他的神情就像光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」一樣。究竟那兩個字有這麼大的魔力，可以破題呢？讓我們用下圖來告訴你那兩個字是什麼（粗黑線是先玩者，粗虛線為後玩者）：



真希望你能拈花微笑的說出那兩個字。如果還未能領悟，那就欣賞紅樓人的智慧：

紅樓人的智慧

那兩個字就是數學裡的重要概念「對稱」。因為扣除中央的房子，四周一共有八個房子可佔，而且他們呈對稱的環形排列。如果後玩者採取對稱的走法，那四周的八個房子會呈雙方各佔四個的平手狀態，但是後玩者最後的一畫會佔走正中央的房子。所以，後玩者只要採取「對稱」的方法，一定會佔比較多的房子。

9.4 後山能者不惶多讓

每年冬天，來趟花蓮之旅，幾乎成為例行公事。住英雄館，或宿美人館，便宜又方便，而且散步就可以到達液香扁食店，吃碗扁食是那晚必做的晚課。白天散步在花蓮港邊的腳踏車步道，想著悠游在海裡的翻車魚，生長在山邊的芋頭，真讓人食指大動。回家時可別忘了帶點曾記麻糬或百年老店惠比須的花蓮薯。有位邱姓大學同學住花蓮真好，每次都帶給我不同的體驗。記得有一次，晚上開車帶我到花蓮的山上品茶看花蓮夜景，讓我留下很深刻的印象；更有一次，帶我到遠來大飯店眺望整個花蓮地區燈火通明的景色。當然，到光復糖廠吃冰或安通洗溫泉也是不可免的啦。

每次到花蓮出差，心情特別愉快，除了當作散心外，參與數學競賽的宜、花、東考生也不是很多，無論是口試或閱卷都輕鬆。記得有一次，一道題目是這樣出的：

問題 4 設實數 a_1, a_2, b_1, b_2 滿足 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0$ 及 $a_1a_2 \geq b_1b_2$。試證明：不等式 $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$ 成立。

基本上，這並不是一道難題，學生作法五花八門都有，不過都離不開把 $a_1 \geq b_1 \geq b_2 \geq a_2 > 0$ 想成數線上的五個點，或者把 $a_1a_2 \geq b_1b_2$ 看成兩個矩形的面積關係，這兩種容易聯想到的出發點。閱卷時發現一位同學利用分數的想法來處理，讓我有點意外。或許是學數論的我對“數”特別敏感，在口試時，問得更詳

細一點，就得知這位男同學的整個想法，現在把他的奇想寫下，供讀者參考：

男同學的瞥見

將 $a_1a_2 \geq b_1b_2 > 0$ 想成分數大小關係，得

$$\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{b_2}{a_2}.$$

將兩邊同時減 1，得

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{b_1} - 1 \geq \frac{b_2}{a_2} - 1 &\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_1} \geq \frac{b_2 - a_2}{a_2} \\ &\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq \frac{b_1}{a_2}.\end{aligned}$$

利用 $b_1 \geq a_2 > 0$（即 $\frac{b_1}{a_2} \geq 1$），得

$$\frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq 1.$$

由 $a_1 - b_1 \geq 0, b_2 - a_2 \geq 0$ 得

$$a_1 - b_1 \geq b_2 - a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2,$$

得證。

練習 **2** 如果要求利用矩形面積的想法來證明這不等式，你有辦法完成嗎？

9.5 來自巨人的真知…投稿者的卓見

「站在巨人的肩上，可以看得更遠；來自巨人的投射，可以照得更亮」是學數學的人渴望有的際遇，想要獲得的加持；但是，巨人的肩膀容易攀爬嗎？巨人的“數光”會普照在每個人身上嗎？這裏要講的這道題目，其背後隱藏著一段與巨人有關的歷史；但是這題目本身卻只是巨人投射之下的一個簡單產物。雖然是個簡單的特例，但想要巧妙解決它，也必須是個奇人才辦得到。就讓我們開始吧！

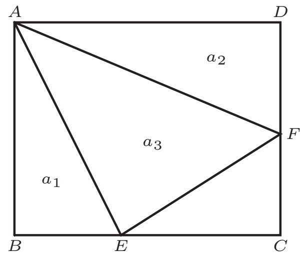
那是一個寒冷的午後，辦公室的電暖氣帶來一絲暖意，幫我工作的助理正打著電腦。幫我工作的助理有兩類，用嚴肅一點的話說，就是「有給職助理」與「無給職助理」兩種，有給職助理是數學系的大學生居多。這幾年經濟不是很好，清寒的優秀學生，可以當我的有給職助理，除了寒暑假幫我寫解答，校對數學資料，試讀一些文章外，最重要的要求，也是唯一條件，就是學期成績至少要達到八十五分以上（告訴你們一個秘密，其實她們常常都超過九十分，比我大學成績都還好）。至於無給職助理就是願意幫我，做牛做馬般，讀校第一手資料的老師了，順便對我的文章給些建議及看法，很感謝她們的付出。

手邊正在處理這期問題集的投稿，像過去一樣，快速的翻閱著老師或學生們的解答。說時遲，那時快，手與腦筋同時定格在一則吸引我的解答上，這在過去是從未發生過的事，原來這是個妙解，肯定出自奇人之手。心中雖然高興，為了順便檢定一下助理的功力，嘴裡說著「這幾個解答回去讀一下，把好的解答打下來」。這是我常用的一種測試，助理們大多不會讓我失望。幾天後，助理告訴我「那個解答特別妙，值得推薦，但是想不通那位老師如何想到這樣的解法」。就在幾天前，一個更寒冷的午後，在拜訪淡江鄭惟厚教授的路上，問題集企劃提起那個我建議刊登的解答，我半開玩笑的建議，應該在該解答的右上角加上一個“獎”字。

說到這妙解的題目那就更妙了，約莫半年前，彰師大科教中心主辦一場「中區數學新知研討會」，邀請我給個演講，希望談一些可以給中學教師拿去當科展教材，又具有數學深度的題目。這讓我想起很久以前，在一本書裡看到，談論有關高斯五邊形面積公式的問題。印象中，它好像是說：「給定任意五邊形，相鄰三個頂點所形成的三角形稱為基本三角形，一共有五個基本三角形。高斯證明：五邊形的面積可以用這五個基本三角形的面積來表示。」至於如何表示，書裡並沒有細講了。經過我搜尋國外數學網站的結果，好不容易找到一篇談論“高斯五邊形面積公式”的文章。事實上，這五邊形的面積恰好是某個以基本三角形面積為係數的二次方程式之一根。有了這些資料，我就開始寫演講的

講義。又有一個問題產生了，我不想一開始就導進高斯這個複雜的公式，想要先引一個簡單的例子，但相應的例子哪裡找呢？還好，在大陸《中學生數學雜誌》與北一女的數學競賽題目裡，我發現了一點跡象。站在巨人高斯的肩上（將面積與一元二次方程式扯上關係），我把這跡象投射到四邊形上，得到如下的例子：

問題 5 如下圖所示：$ABCD$ 是面積為 S 的矩形，a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



證明：

$$S^2 - 2a_3S - 4a_1a_2 = 0.$$

這就是數學問題集裡的題目敘述，同時也是那場演講的開胃菜。曲終人未散，戲棚下站久就是你的，為了回饋你的耐心跟毅力，我們就把奇人的智慧馬上揭曉吧！

投稿者的瞥見

將四條線段 CD, CB, CE, CF 配對相乘，得到等式

$$(CD \times CB) \cdot (CE \times CF) = (CD \times CE) \cdot (CB \times CF).$$

將它們轉換成面積，得

$$S \cdot (2(S - a_1 - a_2 - a_3)) = (S - 2a_1) \cdot (S - 2a_2).$$

整理得到

$$S^2 - 2a_3S - 4a_1a_2 = 0.$$

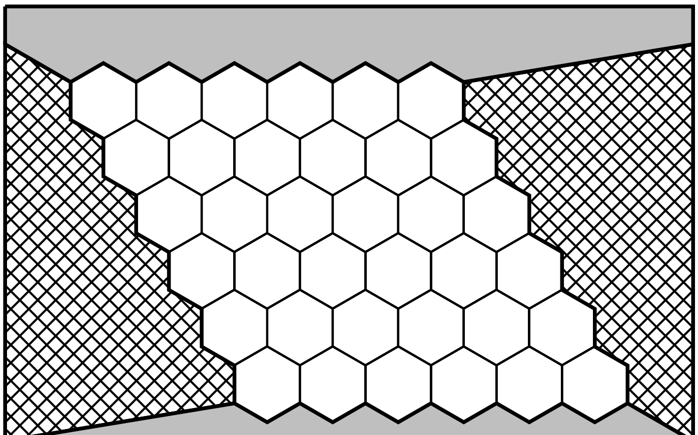
放個馬後炮，整個問題的關鍵點就是 E, F 兩個點，所以考慮從 C 點畫出的四條線段 CD, CB, CE, CF 的不同配對乘積是合情合理的想法。

練習 **3** 將二次方程式的兩個根求出，並確認何者才是面積 S 的值。

練習 **4** 當你具有投影面積的素質或向量內積的知識時，應該想想看！將矩形改成平行四邊形，這個恆等式是否依然成立。投稿者的解釋仍然適用嗎？

10 附錄：納許棋的奧秘

看過電影「美麗境界」嗎？那部電影的主角是一位數學家，叫納許，劇情是演納許對抗病魔三十幾載，最終獲得諾貝爾經濟學獎的動人故事。這裡所要談的納許棋盤，據說是他在普林斯頓高等研究院的廁所發現的。因為廁所的磁磚是正六邊形鋪成的，所以納許棋是跟正六邊形有關的遊戲。我認識納許是從他的納許棋盤開始的，棋盤的樣子如下（這是 6 階的棋盤，共由 $6 \times 6 = 36$ 塊正六邊形磁磚鋪成）：

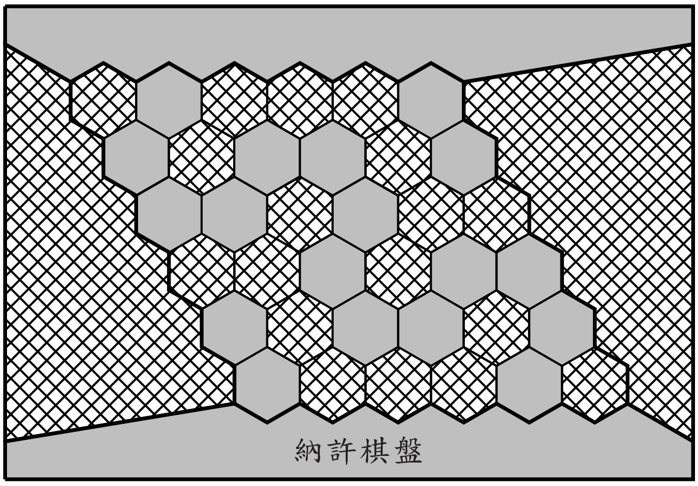


納許棋盤

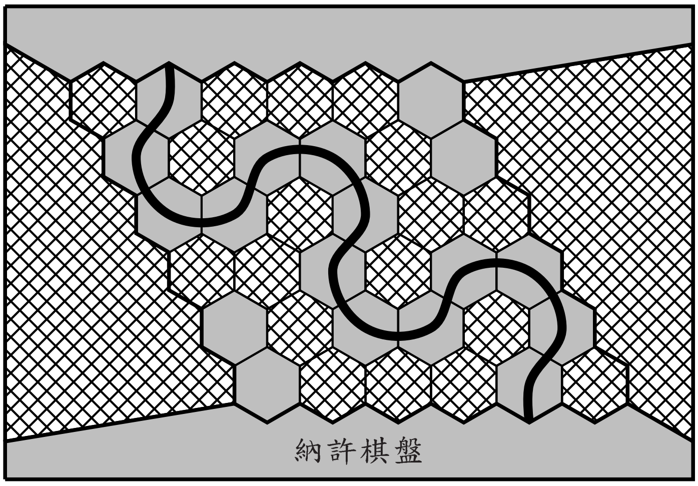
「灰」姑娘與「網」先生正在玩「納許棋」的遊戲。為了公正起見，棋盤內正六邊形土地以外的區域涇渭分明，上、下兩塊為灰姑娘的灰色領土，左、右兩側則是網先生的網狀土地。現在兩人輪流佔領正六邊形的土地，每次只能佔一塊，並將佔領的土地塗成灰色（灰姑娘的領土）或畫成網格（網先生的土地）。在十八回合後，灰姑娘與網先生分別佔領三十六塊土地的一半。

遊戲的勝負如何判定呢？那要看誰能將她（他）的兩塊土地，用佔領的正六邊形土地連接起來。也就是說，灰姑娘從上方灰色領土出發，在只能經過她佔領的正六邊形土地的情況下，可以到達下方灰色領土出時，灰姑娘就獲勝；同樣的，若網先生從左側的網狀土地出發，利用他所佔領的正六邊形土地，可以抵達右側的網狀土地，則網先生得勝。例如，下圖是灰姑娘與網先生某次的交戰紀錄（灰色正六邊形為灰姑娘所佔，網格正六邊形為網先

生所有）：



在下圖中，因為粗黑線的路徑是灰姑娘從上方灰色領土走到下方灰色領土的一條路徑，所以這盤棋由灰姑娘得勝。



從遊戲的特性不難發現，不可能兩人都獲勝，如果一人可以連接他的領土，那們另一人的土地肯定被這串連的線所阻隔。也就是說，至多僅有一人可以把他的領土串連起來。有沒有可能發生兩者都無法串連她們的土地之情況呢？這正是這裡所要討論的問題：

問題 6 (納許棋) 無論雙方如何佔領正六邊形土地，最後一定有人會得到勝利。

兩人玩的遊戲有許多，如象棋，五子棋，圍棋，西洋棋，猜拳（剪刀、石頭、布）等，但是它們都可能和棋。然而，納許棋這道遊戲不可能和棋，一定可以分出勝負，而且是在十八回合內分出勝負，有點不可思議。要如何證明「不會和棋」呢？這似乎超過我們的能力，或者說，截至目前為止，所學的數學沒辦法克服這樣的問題。真的是如此嗎？讓我們來欣賞灰姑娘的錦囊妙計：

灰姑娘的勞作解法

剪紙是中國最為流行的民間藝術之一，根据考古其歷史可追朔到公元六世紀。唐朝有位詩人曾經有著「欲剪宜春字，春寒入剪刀」的詩句，可見剪紙這項技藝在當時社會中，已經是十分普遍的一項民間技藝了。

納許棋會跟剪紙技藝有關嗎？有的，因為它們都在紙上操作，想想看，把其中一方的領土剪掉，剩下的紙張會是什麼模樣呢？

如果網先生的兩塊網狀領土可以透過他佔領的正六邊形土地銜接，那麼網先生就是獲勝的人。否則（網先生無法銜接他的兩塊網狀領土），需說明灰姑娘可以串連她的灰色土地。證明方法是這樣的：

① 利用剪刀將網先生的左、右兩塊網狀領土剪掉。

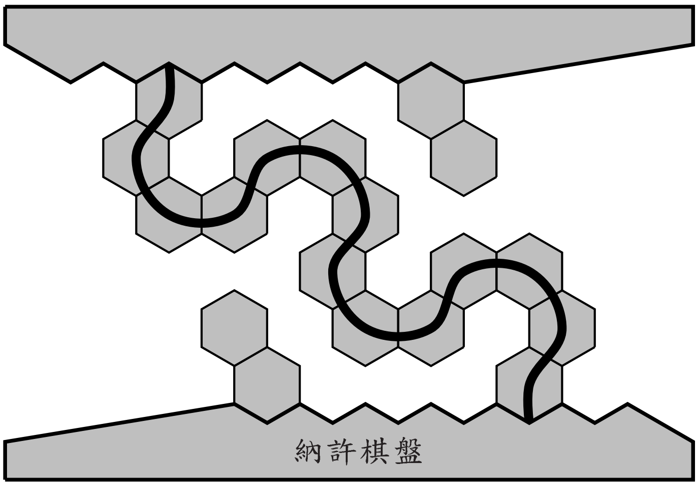
② 再利用剪刀將網先生佔領的十八塊正六邊形網形土地也剪掉。

③ 此時棋盤剩下灰姑娘的上、下兩塊灰色土地及她所佔領的十八塊正六邊形灰色土地。

④ 將右手抓住灰姑娘上方灰色土地，左手捏著灰姑娘下方的灰色領土。看看是否可以將它們拉開。

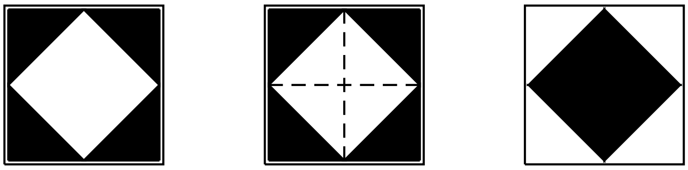
⑤ 若不能拉開，則表示灰姑娘的上、下兩塊灰色土地被她佔領的正六邊形灰色土地串連起來。這種情形就像下圖所示的一樣。

⑥ 若可以拉開，則沿著灰姑娘的上方灰色土地的下沿，可以找到貫穿網先生左、右兩塊網狀領土的路徑，這樣代表網先生獲勝。



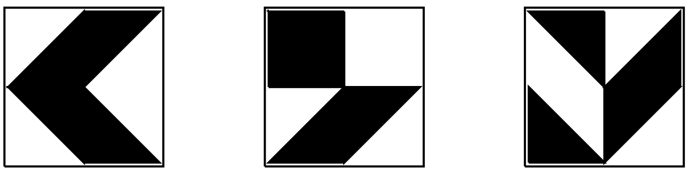
到此，我們已經知道納許棋是一種不會合棋的遊戲。接下來的問題就是「先玩者與後玩者何者有必勝的策略呢？」這是一道更困難的問題，它的解法也超玄的，想知道結果可以參考《算術講義》那本書。

練習 **5** 如下第一圖所示，正方形中心畫一個鑽石菱形。現在將正方形平分成四個小正方形（第二圖），將右上與左下交換，右下與左上交換，得到第三圖。



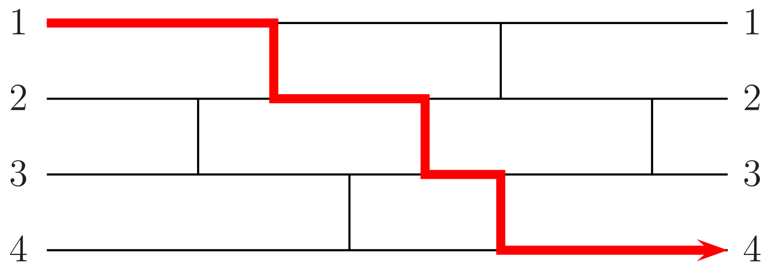
▲ 鑽石遊戲

像這樣，將四個小正方形的位置互換所產生的圖形，稱為原圖的置換圖。試問：下列三個圖，哪幾個是置換圖。



香港有個地產集團設立「恆隆數學獎」（由丘成桐院士主持），用來獎勵中學生在數學科展上的貢獻。首屆（2004 年）銅牌獎是在討論「畫鬼腳」這道中國的傳統遊戲。如下圖所示，在四

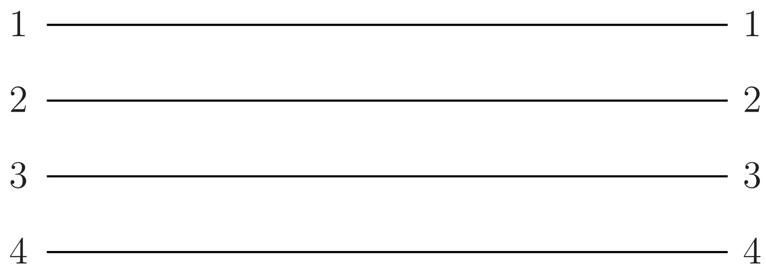
條平行線間畫了七條鬼腳後，左邊的數字 1 往右前進，碰到鬼腳就轉彎，最後抵達數字 4 的位置。



〈鬼腳圖〉

同樣的方法可以發現，數字 2 會走到 2 的位置，數字 3 會跑到 3 的位置，而數字 4 會到達 1 的位置。為了方便起見，就用函數「$1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$」來描述這鬼腳圖的結果。看似簡單的鬼腳圖，其實裡面隱藏著許多深邃的數學知識。就讓我們來一道鬼腳大餐吧！

練習 6 甲、乙兩人輪流在下圖中畫鬼腳，甲先畫一條鬼腳，接著換乙畫，⋯，依此次序輪流畫。



〈鬼腳圖〉

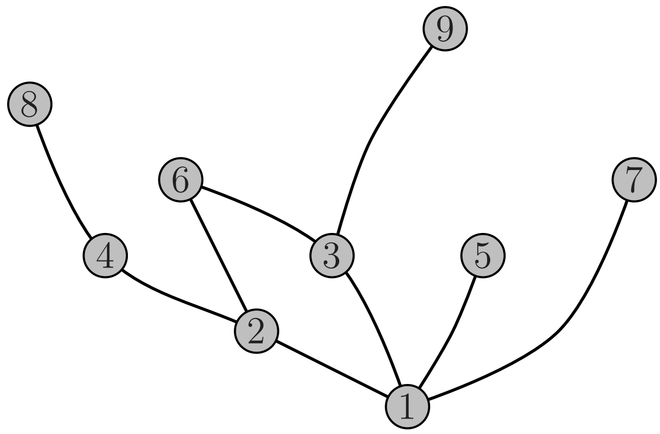
至於鬼腳畫在何處，甲、乙兩人可以自由決定。當有人畫完鬼腳之後，所對應的函數為「$1 \mapsto 4, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 1$」時，此人得勝，比賽停止。

問何者可以得勝。

練習 7 (拔“數”遊戲) 如下圖所示，在種植編號分別為

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

的九棵大樹裡進行拔樹遊戲。甲、乙兩人輪流拔樹，每次拔一棵樹，但是當編號 6 的樹被拔掉時，編號 $1, 2, 3$（6 的因數）的樹也跟著除掉，依此規律拔樹。最後把樹拔光的人獲勝。



〈拔數圖〉

問何者可以得勝。

練習 **8** 這是一道“讀心數”的遊戲，規則是這樣的：玩者先想任意兩個數（不告訴任何人這兩個數），叫做 a_1 與 a_2，接下來將這兩個數相加，令 $a_3 = a_1+a_2$，再將 a_2 與 a_3 相加，得 $a_4 = a_2+a_3$，如此繼續下去，得到數列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_7, \cdots, a_{10}.$$

你只需告訴我 a_7 的值，我就知道

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$$

的值。個中道理為何呢？

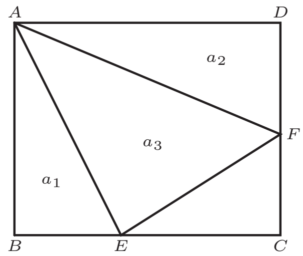
11　附錄：高斯五邊形定理⋯稀少，但成熟

「稀少，但成熟」是數學王子高斯的座右銘，高斯不僅是許多重要數學理論的原創者，在數論，算術與代數，實變與複變分析，機率論及平面幾何上，仍有許多高斯發現的小定理，正十七邊形可以尺規作圖就是一例。

在這裡，我們想介紹較少為人所知的另一個定理⋯高斯五邊形定理。這個定理跟古希臘的托勒密定理是等價的，也等價於接下來要介紹的 Monge 公式。 在介紹 Monge 公式與高斯五邊形定理之前，先談一個比較簡單的類似定理。

11.1　矩形定理

例題 **3** 如下圖所示：$ABCD$ 是面積為 A 的矩形， a_1, a_2, a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



證明：

$$A^2 - 2a_3A - 4a_1a_2 = 0.$$

〔證明〕令 $BE = x, EC = y, DF = a, FC = b$，由

$$A + (a+b)(x+y) = 2A = 2(a_1 + a_2 + a_3) + by$$

知

$$A + ax + ay + bx + by = (a+b)x + a(x+y) + by + 2a_3.$$

整理得

$$A = ax + 2a_3.$$

故

$$
\begin{aligned}
A^2 &= axA + 2a_3A \\
&= x(a+b)a(x+y) + 2a_3A \\
&= (2a_1)(2a_2) + 2a_3A,
\end{aligned}
$$

即

$$A^2 - 2a_3A - 4a_1a_2 = 0.$$

$\boxtimes$

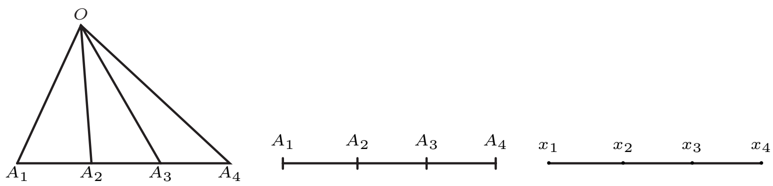
例題 3 是說，矩形面積 A 是以 a_1, a_2, a_3 為係數的二次方程式

$$x^2 - 2a_3x - 4a_1a_2 = 0$$

的一根。

11.2 Monge 公式

例題 4 〈圖一〉中的 A_2, A_3 是三角形 OA_1A_4 邊 A_1A_4 上的兩個點，〈圖二〉中的 A_1, A_2, A_3, A_4 是線段上的四個點，〈圖三〉中的 x_1, x_2, x_3, x_4 是數線上的四個點座標。



〈圖一〉 〈圖二〉 〈圖三〉

證明底下三個等式成立：

$$
\begin{aligned}
\triangle OA_1A_2 \triangle OA_3A_4 + \triangle OA_2A_3 \triangle OA_1A_4 &= \triangle OA_1A_3 \triangle OA_2A_4; \\
A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4 &= A_1A_3 \cdot A_2A_4; \\
(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) &= (x_3 - x_1)(x_4 - x_2).
\end{aligned}
$$

〔證明〕如果令 $\triangle OA_1A_2 = p, \triangle OA_2A_3 = q, \triangle OA_3A_4 = r$，那麼第一個等式就相當於證明式子

$$pr + q(p+q+r) = (p+q)(q+r)$$

成立。但是它是一則恆等式，故一定相等。

將第一個等式的三角形面積用基本面積公式

$$\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$$

代入，因為它們的高都一樣，所以得到第二個等式成立。

將第二個等式中的線段長度改成數線上的座標相減得到第三個等式。 ⊠

事實上，上述三個恆等式與下列三角恆等式等價：

例題 **5** 若 α, β, γ 是任意三個角，則證明三角恆等式

$$\sin\alpha\sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

〔證明〕在這裡提供兩種不同的解法：

〔解一〕利用例題 4 的結果，令 $\angle A_1OA_2 = \alpha, \angle A_2OA_3 = \beta, \angle A_3OA_4 = \gamma$。將等式

$$\triangle OA_1A_2 \triangle OA_3A_4 + \triangle OA_2A_3 \triangle OA_1A_4 = \triangle OA_1A_3 \triangle OA_2A_4$$

換成面積公式得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}OA_1OA_2\sin\alpha \cdot \frac{1}{2}OA_3OA_4\sin\gamma \\
&+\frac{1}{2}OA_2OA_3\sin\beta \cdot \frac{1}{2}OA_1OA_4\sin(\alpha+\beta+\gamma) \\
&=\frac{1}{2}OA_1OA_3\sin(\alpha+\beta) \cdot \frac{1}{2}OA_2OA_4\sin(\beta+\gamma).
\end{aligned}$$

將兩邊同時除以 $\frac{1}{4}OA_1OA_2OA_3OA_4$ 得到

$$\sin\alpha\sin\gamma + \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

〔解二〕利用三角學的積化和差與和差化積公式，得到

$$
\begin{aligned}
&\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta\\
&\quad=-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\gamma)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\gamma)\\
&\qquad-\frac{1}{2}\cos(\alpha+2\beta+\gamma)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\gamma)\\
&\quad=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+2\beta+\gamma)\right]\\
&\quad=\frac{1}{2}\left[-2\sin\frac{(\alpha-\gamma)+(\alpha+2\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\gamma)-(\alpha+2\beta+\gamma)}{2}\right]\\
&\quad=-\sin(\alpha+\beta)\sin(-\beta-\gamma)\\
&\quad=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).
\end{aligned}
$$

⊠

例題 6 (Monge 公式) 設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 是凸五邊形，令 $\pi_{ij}(1\leq i,j\leq 4)$ 代表三角形 $A_0A_iA_j$ 的面積。證明

$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{14}\pi_{23}=\pi_{13}\pi_{24}.$$

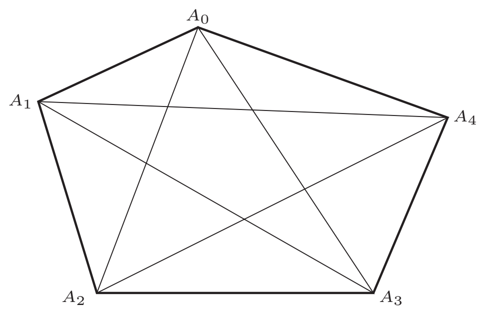
〔證明〕令 $\angle A_1A_0A_2=\alpha,\angle A_2A_0A_3=\beta,\angle A_3A_0A_4=\gamma$，利用三角函數的面積公式得到

$$
\begin{aligned}
&\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{14}\pi_{23}\\
&\quad=\frac{1}{2}A_0A_1\times A_0A_2\times A_0A_3\times A_0A_4\left[\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta\right]\\
&\quad=\frac{1}{2}A_0A_1\times A_0A_2\times A_0A_3\times A_0A_4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\\
&\quad=\pi_{13}\pi_{24}.
\end{aligned}
$$

⊠

11.3 高斯五邊形定理

設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 為凸五邊形，三角形 $A_4A_0A_1$ 的面積為 a_0，$A_0A_1A_2$ 的面積為 a_1，$A_1A_2A_3$ 的面積為 a_2，$A_2A_3A_4$ 的面積為 a_3， $A_3A_4A_0$ 的面積為 a_4。



高斯證明五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積可以表成 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 的公式， 這就是有名的高斯五邊形面積公式：

定理 1 若令 A 是五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積，常數 c_1, c_2 定為

$$c_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4;$$
$$c_2 = a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_0,$$

則五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積 A 會滿足二次方程式

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0.$$

〔證明〕令 $\pi_{ij}(1 \leq i, j \leq 4)$ 代表三角形 $A_0A_iA_j$ 的面積，則

$$\pi_{12} = a_1;$$
$$\pi_{34} = a_4;$$
$$\pi_{14} = a_0;$$
$$\pi_{23} = A - a_1 - a_4;$$
$$\pi_{13} = A - a_2 - a_4;$$
$$\pi_{24} = A - a_1 - a_3.$$

利用Monge 公式得

$$a_1a_4 + a_0(A - a_1 - a_4) = (A - a_2 - a_4)(A - a_1 - a_3),$$

整理得

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0.$$

$\boxtimes$

想想看高斯問題的變形：如果令三角形

$$A_0A_2A_3, A_1A_3A_4, A_2A_4A_0, A_3A_0A_1, A_4A_1A_2$$

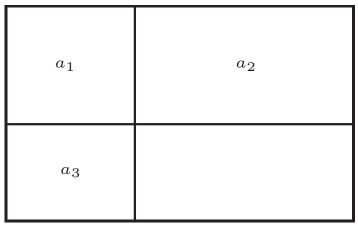
的面積依序為

$$a, b, c, d, e,$$

那麼五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積是否也可以表成以 a, b, c, d, e 為係數的二次方程式呢?類似這樣的問題就有很多可以探討了,甚至可以探討六,七,八,…邊形的情形。

$\boxed{\text{思考問題}}$

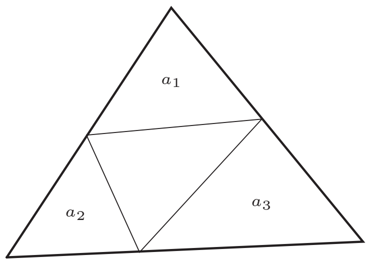
1 如下圖所示,面積為 A 的大矩形,被分割成四個小矩形,其中 a_1, a_2, a_3 為所在小矩形區域的面積。



證明

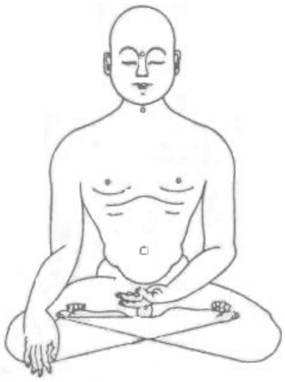
$$a_1(A - a_1) = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1.$$

2 如下圖所示,三角形的面積為 A,三個角落的面積為 a_1, a_2, a_3:



試求 A, a_1, a_2, a_3 的關係。

12 附錄：用格子點串起的面積公式


數學經文

格子點，井然有序地座落在平面上的孤立點，他們沒有輕重之分，也無好壞之別。穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面…一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介。

欲瞭解幾何與代數的融合，需時常唸誦華羅庚的名言「數與形，本是相倚依，焉能分作兩邊飛，數缺形時少直覺，形少數時難入微，數形結合百般好，隔裂分家萬是非，切莫記，幾何代數統一體，永遠聯繫，切莫分離。」

指考《數學乙》考過如下的填充題：
當平面上的點 (x, y) 之座標 x 與 y 都是整數，稱點 (x, y) 為格子點。數學家知道：座標平面上三個頂點皆為格子點的三角形之面積可以用公式

$$aS + bI + c$$

來表示，其中 S 代表三角形的周長上（三邊邊上）的格子點數，I 是落在三角形內部（不含邊上）的格子點數，a, b, c 是固定的常數。求常數 a, b 與 c 的值。

這是有名的皮克公式，只需選定幾個以格子點為頂點的三角形便能求得公式中的常數 a, b 與 c 的值。現在讓我們以不同的角度來探索皮克公式！

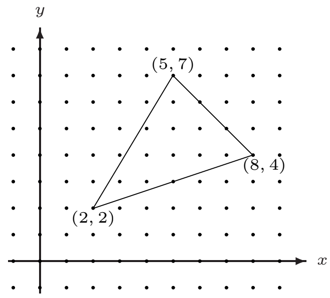
問題 7 (皮克公式) 以格子點為頂點的三角形面積可表為

$$\frac{S}{2} + I - 1$$

的形式。

12.1 井然有序的格子點

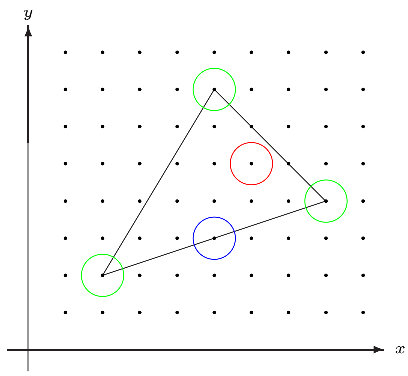
如下圖所示，x 與 y 座標都是整數的點（稱它們為格子點）井然有序的分佈於整個平面上：



觀察以格子點 $(2,2),(5,7),(8,4)$ 為頂點的三角形，內部有 10 個格子點，邊上有 6 個格子點。內部每個格子點附近的區域都在三角形內；而邊上的格子點中，在邊上但不是頂點的格子點附近幾乎有一半的區域在三角形內部，另一半在外部；但頂點附近，絕大部分的區域都在三角形外部。因此，三角形面積受其內部與邊上的格子點數影響。在下一小節中，我們將精細的討論這影響有多大。

12.2 用格子點串起的念珠⋯皮克公式

在前一小節中，我們將三角形內部或邊上的格子點區分成三類：內部格子點，邊上非頂點格子點與頂點格子點。現在各取一點為圓心，畫圓如下圖所示：



一種富有創意的思維：

① 當格子點在三角形內部時（如紅色圓圈所示）：
因為附近區域的面積都在三角形內部，所以每個格子點當成 1 單位的面積計算，此部分得到 I 單位面積；

② 當格子點落在三角形的邊上，而非頂點時（如藍色圓圈所示）：
因為一半的區域在三角形內部，另一半在外部，所以每個格子點只能以 $\frac{1}{2}$ 單位的面積計算，此部分得到 $\frac{S-3}{2}$ 單位面積；

③ 當格子點是三角形的三個頂點時（如綠色圓圈所示）：
因為三內角和為 $180°$，所以三頂點附近的區域只能拼出 $\frac{1}{2}$ 單位面積。

綜合得到三角形面積為

$$I+\frac{S-3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{S}{2}+I-1.$$

⊠

從“富有創意的思維”中，是否可以啟發你推導以格子點為頂點的四邊形，五邊形，⋯，甚至多邊形的面積公式呢？嘗試四邊形的情形看看！

練習 **9** 利用上述方法推導以格子點為頂點的四邊形面積公式（以符號 S, I 表示）。

12.3 師父中的師父

談到三角形的面積公式，不外乎會想到類似

$$\frac{\text{底}\times\text{高}}{2}, \frac{1}{2}ab\sin\angle C, \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

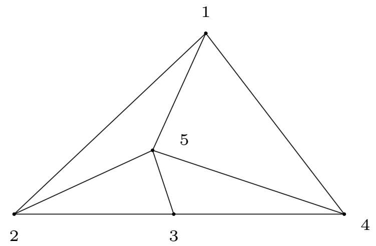
這樣的公式。這幾個面積公式的推導並不困難，而且其證明互有因果關係。不像皮克公式，自成一格，特別是公式中的常數 $\frac{1}{2}, 1, -1$ 充分反應了三角形內部、邊上與頂點這些格子點的份量。將幾何與代數完全融合，這也印證華羅庚說的「⋯數缺形時少直覺，形少數時難入微⋯」。皮克以三角形內部、邊上的格子點為珠子，然後用他腦中細微無形的線串出漂亮的「皮克公式」這串念珠。因此，皮克可以說是研究三角形面積公式的“師父中的師父”。

幾何圖形必須透過眼睛來欣賞與觀察，但是沒有耳朵的話，卻無法聆聽她所發出的天籟之音；同樣的，代數式子必須靠靈敏的耳朵來聆聽，但是沒有眼睛的話，卻無法看到她所呈現的美貌。

因此，「沒有幾何的代數是瞎子、沒有代數的幾何是聾子。」對一位眼、耳健全的人，不應輕易放棄她可以同時擁有欣賞與聆聽的本能。

你想當師父中的師父嗎？請完成底下的練習：

練習 10 (稜線定理) 十八世紀盛行的「三角測量」就是將欲丈量的凸多邊形切割成若干個小三角形來一一丈量。如下圖



就是一個三角形被切割成四個小三角形的情形，其中 $1,2,3,4,5$ 稱之為丈量點，兩丈量點之間的黑線（需丈量的線）稱之為丈量稜線（上圖中恰有 8 條丈量稜線）。

在丈量凸多邊形的所有丈量點數記為 B，內部（不含邊上）的丈量點數記為 I；所需丈量的丈量稜線數記為 S。

根據「三角測量」的經驗法則得知：會有實數 a,b,c 使得式子

$$S = aB + bI + c$$

恆成立。試以幾個實際的圖例求出 a,b,c 的值。

練習 11 (尤拉公式) 承練習 10 的符號，令丈量點與丈量稜線所分割出的三角形總數有 T 個。已知會有實數 a,b,c 使得式子

$$T = aB + bE + c$$

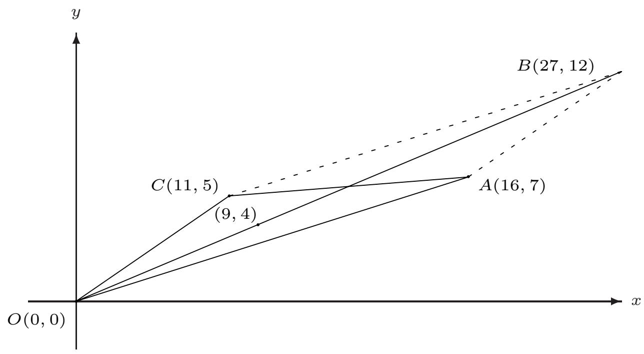
恆成立，試求 a,b,c 的值。

12.4 皮克公式的插曲

大家都很好奇「介於 $\frac{7}{16} < \frac{b}{a} < \frac{5}{11}$ 之間的分數 $\frac{b}{a}$ 有無窮多個，究竟分母 a 最小的那個分數是誰呢？」你可曾想過皮克公式對這樣的問題是有幫助的。

請容許我先解釋一下這節中的部分數學經文「⋯穿過格子點的直線與有理數是相同東西的兩面⋯一面是幾何、而另一面是代數，斜率是串連這兩面的媒介⋯。」

通過兩個格子點的直線之斜率剛好是“（兩格子點的 y 座標差）÷（兩格子點的 x 座標差）” 這個有理數。相反的，有理數 $\frac{7}{16}$ 與 $\frac{5}{11}$ 可以想成是通過 $(0,0),(16,7)$ 與通過 $(0,0),(11,5)$ 這兩條直線的斜率。 考慮下圖



① 四邊形 $OABC$ 是一個平行四邊形， B 點座標為

$$(27,12)=(16,7)+(11,5).$$

直線 OB 通過格子點 $(9,4)$，且該直線的斜率為 $\frac{4}{9}$。

② 三角形 OAC 的面積為

$$\frac{1}{2}|11\cdot 7-16\cdot 5|=\frac{3}{2}.$$

③ 三角形 OAC 的邊上格點僅頂點 3 個而已，根據皮克公式知道

$$\frac{3}{2}+I-1=\frac{3}{2}\Rightarrow I=1.$$

因此三角形 OAC 的內部格子點數僅一點，即 $(9,4)$ 是三角形 OAC 內部唯一的格子點。

綜合得到：通過 $(0,0),(9,4)$ 的直線的斜率 $\frac{4}{9}$ 是介於 $\frac{7}{16}<\frac{b}{a}<\frac{5}{11}$ 之間的分數 $\frac{b}{a}$，分母 a 最小的那個。故答案為

$$\frac{4}{9}.$$

⊠

練習 12 考慮底下兩個問題：

(1) 試求以 $(0,0),(8,5),(13,8)$ 為頂點的三角形內部格子點之數目。

(2) 求介於 $\frac{5}{8}$ 與 $\frac{8}{13}$ 之間分母最小的分數。

12.5 宰相肚裡可撐船

這節對皮克三角形面積公式

$$\frac{S}{2}+I-1$$

與練習 10 的稜線定理

$$S=2B+I-3$$

作解釋如下：

① 皮克公式 $\frac{S}{2}+I-1$：
由公式得知，三角形邊上每個格子點的貢獻是 $\frac{1}{2}$；但三角形內部的每個格子點之貢獻是 1。因此，內部格子點數越多的三角形，其面積就越大。

② 稜線定理 $S=2B+I-3$：
此公式說，邊上每設立一丈量點會貢獻出 2 條丈量稜線；但內部每設立一丈量點會貢獻出 3 條丈量稜線。欲使丈量稜線越少，應儘可能將丈量點設在邊上，不要設在內部。也就是說，內部丈量點越多的多邊形，其丈量稜線就越多。

12.6 廓庵十牛圖的啟示

從畢達哥拉斯的畢氏定理，將直角三角形與代數 $c^2=a^2+b^2$ 相連結，皮克公式，將格子點三角形面積與代數 $\frac{S}{2}+I-1$ 相連繫，到稜線定理，將多邊形與代數 $S=2B+I-3$ 相銜接，都讓華羅庚的名言「數缺形時少直覺，形少數時難入微」餘音繞樑，三月不止。這樣的例子不僅數學上有，其它領域也不遑多讓。在十二世紀時，宋朝廓庵禪師對修行、求法的過程作了前無古人，後無來者的妙喻，且讓我們接受他的點化吧！

《十牛圖》最初有八幅畫，不是十幅，它們不是佛教的，是道教的。它們的起始不詳，沒有人知道它們是怎麼開始的，誰畫出了第一幅牛圖。但在十二世紀，宋朝廓庵禪師把它們重畫了一遍，不僅如此，他還增加了兩幅畫，八幅變成了十幅。這十圖分別為一、尋牛，二、見跡，三、見牛，四、得牛，五、牧牛，六、騎牛歸家，七、忘牛存人，八、人牛俱忘，九、返本還源，十、入廛垂手。

廓庵畫《十牛圖》的目的，是為了探尋“禪宗的修行、求法”這不可表達的內在旅程作出獨特的嘗試。但他畫了《十牛圖》後並不滿足，於是他寫了詩來補充，作為附錄。首先他畫了這十幅圖畫；覺得不滿意，他寫了十首小詩，畫中缺了什麼，他就嘗試在詩歌中補充它們。他還是覺得不滿意。於是他又寫了十篇散文注釋。我知道他一定仍然覺得不滿意，但沒有什麼可做了。真實是博大的，表達是有限的，但他盡了最大的努力。

對修行者來說：「圖畫是無意識的語言，它是視覺化的語言；文字是有意識的語言，它是頭腦裡的語言；而詩歌是潛意識的語言，它是溝通圖與文字的橋樑。」圖、詩歌與文字都無法完全描述修行、求法的全部，但圖可以無限想像，可以給點暗示，詩歌與文字可以補充說明，兩者對內在旅程的探尋不無小補；但對數學家來說：「幾何是欣賞的語言，它是視覺化的語言；而代數是聆聽的語言，它是思考化的語言。」幾何圖形永遠無法十分精確，但提供無限的想像與漣漪，代數式子很難有浪漫的聯想，但提供慎密的解釋；因此幾何與代數的互補性足以刻畫科學的現象與性質。

在此提供《十牛圖》的幾個圖供參考，值得注意的是第八圖是個空圖，就是“空無”的意思。

第一圖：尋牛

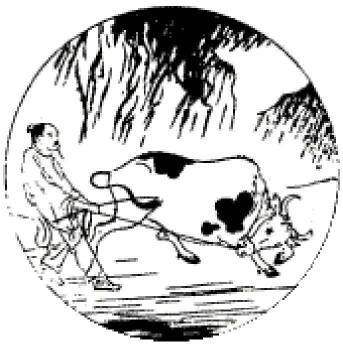
忙忙撥草去追尋，
水闊山遙路更深。
力盡神疲無處覓，
但聞楓樹晚蟬吟。

第二圖：見跡

水邊林下跡偏多，
芳草離披見也麼，
縱是深山更深處，
遼天鼻孔怎藏他?

第三圖：見牛

黃鶯枝上一聲聲，
日暖風和岸柳青，
只此更無回避處，
森森頭角畫難成。



第四圖：得牛

竭盡精神獲得渠，
心強力壯卒難除，
有時才到高原上，
又入煙雲深處居。

第五圖：牧牛

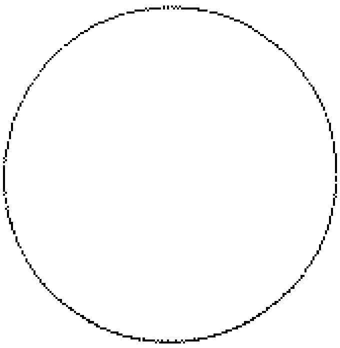
鞭索時時不離身，
恐伊縱步入埃塵，
相將牧得純和也，
羈鎖無拘自逐人。

第六圖：騎牛歸家

騎牛迤邐欲還家，
羌笛聲聲送晚霞。
一拍一歌無限意，
知音何必鼓唇牙。

第七圖：忘牛存人

騎牛已得到家山，
牛也空兮人也閑，
紅日三竿猶作夢，
鞭繩空頓草堂間。



第八圖：人牛俱忘

鞭索人牛盡屬空，
碧天廖廓信難通。
紅爐焰上爭熔雪，
到此方能合祖宗。

第九圖：返本還源

返本還源已費功，
爭如直下若盲聾，
庵中不見庵前物，
水自茫茫花自紅。

第十圖：入廛垂手

露胸跣足入廛來，
抹土涂灰笑滿腮。
不用神仙真秘訣，
直教枯木放花開。

12.7 途徑雖多，旅人卻少

在這章裡，用了三種不同的語言來描述數學，第一種是意識頭腦裡的語言（白話文），鉅細靡遺的描述了“皮克面積公式及其應用”；第二種是淺意識裡的語言（詩文），寫下模糊中帶有清晰，提示中帶有暗示的“數學經文”；第三種是無意識裡的語言（圖畫），借助廓庵禪師的《十牛圖》讓讀者對數學的學習，帶有“橫看成嶺，側成峰，高底遠近解讀各不同”的風韻，圖畫描述數學可虛擬，可實際，有模糊，有清晰，既提示，又暗示，讓人留下無限的解讀與想像空間。

頭腦清晰的人就可以用白話文這種語言描寫數學，這樣的人可以當老師；作點夢或喝點酒的人才能用詩文般的語言描述數學，就如同華羅庚的詩「數缺形時少直覺，形少數時難入微」一樣，這樣的人足以當師父；發點瘋的人可以用圖畫般的語言描述數學，就如同廓庵禪師用《十牛圖》描述“修行、求法”一樣，這樣的人就是師父中的師父。